DEVOIR

Exercice 1 $(U_n)_n$ المعرفة une suite réelle telle que : $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = \dfrac{6U_n}{1+15U_n}$

1) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_n > \dfrac{1}{3}$

2) Etudier la monotonie de $(U_n)_n$ en déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_n \leq 1$

3) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_{n+1} - \dfrac{1}{3} \leq \dfrac{1}{6}\left(U_n - \dfrac{1}{3}\right)$ en déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_n - \dfrac{1}{3} \leq \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{6}\right)^n$

4) on pose $V_n = 1 - \dfrac{1}{3U_n}$ pour tout entier naturel n

a) montrer que $(V_n)_n$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{6}$

b) calculer V_n puis U_n en fonction de n

c) on pose $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} V_k$ et $T_n = \sum_{k=0}^{k=n} \dfrac{1}{U_k}$ déterminer S_n en fonction de n

en déduire que $T_n = 3n + \dfrac{3}{5} + \dfrac{12}{5}\left(\dfrac{1}{6}\right)^{n+1}$

Exercice 2 Soit la suite $(U_n)_n$ définie par $U_1 = 5$ et $U_{n+1} = 3U_n + 4^n$. on pose $V_n = 4U_n - U_{n+1}$

1) calculer U_0 , U_2 et V_0

2) montrer que $(V_n)_n$ est géométrique de raison $q = 3$ et calculer V_n en fonction de n

3) on pose $T_n = \sum_{k=0}^{k=n} V_k$ et $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} U_k$

a) déterminer T_n en fonction de n

b) montrer que $V_n = U_n - 4^n$ en déduire que $U_n = 4^n + 3^{n-1}$

c) montrer que $T_n - 3S_n = U_0 - U_{n+1}$ puis déterminer S_n en fonction de n

Exercice 3 *On considère la suite $(U_n)_n$ telle que $U_0 = 0$; $U_1 = 1$ et $U_{n+2} = \dfrac{1}{6}U_{n+1} + \dfrac{1}{6}U_n$*

On pose $V_n = U_{n+1} - \dfrac{1}{2}U_n$ et $W_n = U_{n+1} + \dfrac{1}{3}U_n$

1) a) *montrer que $(V_n)_n$ est géométrique et calculer V_n en fonction de n*

b) *montrer que $(W_n)_n$ est géométrique et calculer W_n en fonction de n*

2) *on pose $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} W_k$ et $T_n = \sum_{k=0}^{k=n} U_k$*

a) *calculer S_n en fonction de n et déterminer U_n en fonction de n*

c) *prouver que $T_n = \dfrac{3}{2} - \dfrac{3}{10}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n - \dfrac{6}{5}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$*

PROF : ATMANI NAJIB 1BAC SM BIOF

TD-CALCUL TRIGONOMETRIQUE

Exercice1 :1)Calculer $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$

2)Calculer $\cos\frac{5\pi}{12}$ et $\sin\frac{5\pi}{12}$

3) monter que : $\cos x = \cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$

4) monter que : $\sin(x+\frac{2\pi}{3})+\sin(x-\frac{2\pi}{3})+\sin x = 0$

Exercice2 :

Soient : $0 \prec a \prec \frac{\pi}{2}$ et $0 \prec b \prec \frac{\pi}{2}$ et $\cos a = \sin b = \frac{1}{2}$

1)Calculer : $\sin a$ et $\cos b$

2) Calculer : $\sin(a+b)$

Exercice3 : Calculer $\cos\frac{11\pi}{12}$ et $\sin\frac{11\pi}{12}$

Exercice4 :calculer $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$

Exercice5 : Sachant que $\sin x = \frac{1}{2}$ et $0 \prec x \prec \frac{\pi}{2}$

calculer : $c\text{os}(2x)$ et $\sin(2x)$

Exercice6 : Montrer que **:** $\frac{\sin 3x}{\sin x}-\frac{\cos 3x}{\cos x}=2 \ \forall x \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$

Exercice7 : Montrer que :

1) $1-\cos x+\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)$

2)si $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\sin\alpha \neq -1$ alors

$\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}=\tan^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$

Exercice8 : Montrer que **:** $\forall x \in \mathbb{R}$

1) $\sin^2 2x-\cos 2x-1=-2\cos^2 x\times\cos 2x$

2) $2\sin^2 x+12\cos^2 x=5\cos 2x+7$

Exercice10 : Calculer $\tan\frac{11\pi}{12}$

Exercice11 :

1- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 + 2x - 1 = 0$

2- En déduire $tan\ (\frac{\pi}{8})$

Exercice12 : soit $a \in \mathbb{R}$ tel que : $\tan\frac{a}{2}=\sqrt{2}$

Calculer $\cos a$ et $\sin a$ et $\tan a$

Exercice13 :1- Montrer que $tan\ (\frac{\pi}{12}) = 2-\sqrt{3}$

2- Considérons l'équation :

(E): $2cosx - 2sinx - 1 - \sqrt{3} = 0$

a) Vérifier que $\pi + 2k\pi$ n'est pas une solution de l'équation (E)

b) en posant : $t = tan\ (\frac{x}{2})$, résoudre l'équation (E)

(remarquer que $4-2\sqrt{3}=\left(\sqrt{3}-1\right)^2$

3- Représenter les images des solutions sur le cercle trigonométrique.

Exercice14 : *Transformer en produits les expressions suivantes :*

1) $A(x)=\sin 2x+\sin 4x$

2) $B(x)=\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\cos 4x$

Exercice15 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$sinx + sin3x + sin5x + sin7x = 0$

Exercice16 : écrire sous la forme d'une somme

1) $\cos 2x\times\sin 4x$ 2) $\sin x\times\sin 3x$ 3) $\cos 4x\times\cos 6x$

Exercice17 : calculer

1) $\cos\frac{7\pi}{12}\times\cos\frac{5\pi}{12}$ 2) $\sin\frac{7\pi}{12}\times\cos\frac{5\pi}{12}$

Exercice18 : Montrer que

1) $\sin\frac{3\pi}{11}+\sin\frac{7\pi}{11}=2\sin\left(\frac{5\pi}{11}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{11}\right)$

2) $\sin\frac{3\pi}{11}-\sin\frac{7\pi}{11}=-2\cos\left(\frac{5\pi}{11}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{11}\right)$

3) en déduire que: $\frac{\sin\frac{3\pi}{11}+\sin\frac{7\pi}{11}}{\sin\frac{3\pi}{11}-\sin\frac{7\pi}{11}}=-\frac{\tan\left(\frac{5\pi}{11}\right)}{\tan\left(\frac{2\pi}{11}\right)}$

Exercice19 : Montrer que $\frac{\cos 2x-\cos 4x}{\cos 2x+\cos 4x}=\tan 3x\times\tan x$

Exercice20 : Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$

$\cos^2\frac{5x}{2}-\cos^2\frac{3x}{2}=-\sin 4x\times\sin x$

Exercice21 : Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$

1) $\sin 3x = \sin x \times (3 - 4\sin^2 x)$

2) $\cos 3x = \cos x (4\cos^2 x - 3)$

3) $\cos(4x) = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$

4) $\sin(4x) = 4\sin x (2\cos^3 x - \cos x)$

5) $\cos^3 x = \frac{1}{4}(3\cos x + \cos 3x)$

Exercice22 : $P(x) = \sin 2x - \sin x$ et $Q(x) = 1 + \cos x + \cos 2x$

Montrer que : $P(x) = \sin x (2\cos x - 1)$ et $Q(x) = \cos x (2\cos x + 1)$

Exercice23 : 1- Linéariser : $2cos^2x.\ sin\ (2x)$

2- Linéariser : $\cos^3 x$

Exercice24 : 1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$cos\ (2x + \frac{\pi}{4}) = -\ \frac{\sqrt{3}}{2}$

Représenter les images des solutions sur le cercle trigonométrique.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$cos\ (x + \frac{\pi}{4}) = sin\ (3x - \frac{\pi}{6})$

Déterminer les solutions dans l'intervalle$]-\pi, \pi]$

Exercice25 :

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $sin\ (3x + \frac{\pi}{6}) = -\ \frac{\sqrt{2}}{2}$

Représenter les images des solutions sur le cercle trigonométrique.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$-cos\ (3x + \frac{\pi}{3}) = sin\ (x - \frac{\pi}{6})$

Déterminer les solutions dans l'intervalle$]-\pi, \pi]$

Exercice26 :

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $\tan\ (2x + \frac{\pi}{6}) = -1$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $cosx - \sqrt{3}\, sinx = 0$

Exercice27 :1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équations suivantes : $\cos 2x = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

2) Résoudre dans $[0 ; \pi]$ l'équations suivantes :

$\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$

3) Résoudre dans $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$ l'équations suivantes :

$\tan\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) = 1$

Exercice28 : $\cos x - \sin x \quad a = 1$ et $b = -1$

calculons : $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

$\cos x - \sin x = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos x - \sin\frac{\pi}{4}\sin x\right)$

$\cos x - \sin x = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$

Exercice29 : Résoudre dans $[0; 2\pi]$ l'équation :

$\sqrt{3}\cos x + \sin x = \sqrt{3}$

Exercice30 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$\sqrt{3}\, cos(3x) + sin(3x) + 2 = 0$

Exercice31 : Résoudre dans $[-\pi ; \pi]$ l'inéquation

$\cos x \geq \frac{1}{2}$

Exercice32 : Résoudre dans $[0,3\pi]$ l'inéquation :

$2cosx + \sqrt{3} \leq 0$

Exercice33 : Résoudre dans $[0, 2\pi[$ l'inéquation

$\sin x \geq \frac{1}{2}$

Exercice34 : Résoudre dans $[0 ; 2\pi]$ l'inéquation suivante : $\tan x - 1 \geq 0$

Exercice35 : Résoudre dans $[-\pi ; \pi]$ l'inéquation suivante : $3\tan x - \sqrt{3} \geq 0$

Exercice36 : 1)Résoudre dans $[-\pi; \pi]$ l'équation :

$\sqrt{3}\cos x - \sin x = 1$

2)Résoudre dans $[-\pi; \pi]$ l'inéquation :

$\sqrt{3}\cos x - \sin x \geq 1$

Exercice37 : 1) a)Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équations suivantes : $2\sin^2 x - 9\sin x - 5 = 0$ et en déduire les solutions dans $[0 ; 2\pi]$

b) résoudre dans $[0 ; 2\pi]$ l'inéquation suivante :

$2\sin^2 x - 9\sin x - 5 \leq 0$

2)Résoudre dans $[0 ; \pi]$ l'inéquation suivante :

$(2\cos x - 1)(\tan x + 1) \geq 0$

Exercice38 : 1. Résoudre dans $[-\pi, \pi]$ l'inéquation :

$sin\ (3x + \frac{\pi}{4}) \leq -\frac{1}{2}$

2. Résoudre dans $[-\pi, \pi]$ l'inéquation :

$4cos^2x - 2(1 + \sqrt{2})cosx + \sqrt{2} \leq 0$

3. Résoudre dans $[-\pi, \pi]$ l'inéquation : $\frac{1+\tan x}{\sin 2x} \geq 0$

Exercice39 :

Résoudre dans $[-\frac{11\pi}{5}, \frac{14\pi}{5}]$ l'équation $sin3x \geq \frac{1}{2}$

Exercice40 :: soit $x \in \mathbb{R}$ on pose :

$$A(x) = \cos 3x - 3\sin x + 3\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

1) calculer $\cos 3x$ en fonction de $\cos x$

Et calculer $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$

2) en déduire une écriture simple de $A(x)$

3)a)Résoudre dans $I = [-\pi; \pi]$ l'équations: $A(x) = \frac{1}{2}$

3)b) Résoudre dans I l'inéquations: $A(x) \leq \frac{1}{2}$

Exercice41 : on pose :

$$A = \sin\frac{\pi}{9} \times \sin\frac{2\pi}{9} \times \sin\frac{3\pi}{9} \times \sin\frac{4\pi}{9}$$

1) monter que : $\sin\frac{\pi}{9} \times \sin\frac{4\pi}{9} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \cos\frac{5\pi}{9}\right)$

2) monter que : $\cos\frac{5\pi}{9} \times \sin\frac{2\pi}{9} = \frac{1}{2}\left(\sin\frac{7\pi}{9} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

3) en déduire que : $A = \frac{3}{16}$

Exercice 42: soit : $\theta \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ tel que : $3\sin\theta + 5\cos\theta = 5$

1) monter que : $5\sin\theta - 3\cos\theta = 3$

2) déduire la valeur de : $\cos\theta$ et $\sin\theta$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices

Que l'on devient un mathématicien