Leçon N°8 :
Oscillations libres dans un circuit RLC série

Introduction :

Un circuit RLC série est une combinaison d'une résistance, un conducteur, et une bobine, qui sont placées en série.
Ce type des circuits sont largement utilisés dans tous les récepteurs de radio et de télévision.

➲ **Quels sont les phénomènes électriques qui se produisent dans un circuit RLC série ?**

➲ **Quels sont les paramètres physiques associés au circuit RLC série ?**

I. Décharge d'un condensateur dans une bobine

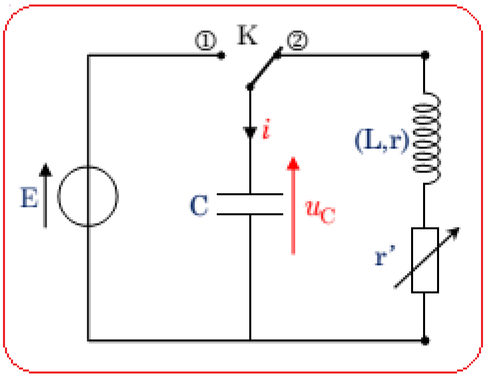
1. Présentation du montage expérimental

On réalise un *circuit RLC* en associant *en série* :

- Un rhéostat de résistance ajustable r'.
- Un condensateur de capacité C.
- Une bobine d'inductance L et de résistance r.

La résistance équivalente du montage est notée R, tel que :

$$R = r + r'$$

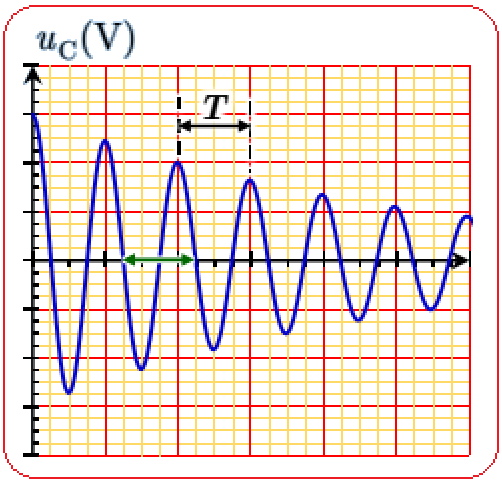


On place l'interrupteur K à la position (1) une durée suffisante pour que le condensateur soit chargé, puis on le bascule à la position (2) tout en visualisant sur l'écran d'un oscilloscope la tension U_C aux bornes du condensateur.

On obtient ainsi un circuit RLC en série dans lequel la charge emmagasinée dans le condensateur oscille entre ses armatures, car le condensateur se décharge et se charge régulièrement, mais grâce à l'existence de la résistance dans le circuit, la charge du condensateur diminue de même que la tension entre ses bornes, on dit que les oscillations sont *amorties*. Et comme le circuit RLC ne comporte pas de générateur (ne comporte pas une source externe d'énergie), les oscillations sont dites *libres*.

Explication de l'amortissement des oscillations :

L'amortissement est due au fait qu'une partie de l'énergie électrique se perd au niveau de la résistance du circuit par effet Joule.



2. Régimes d'oscillations libres

Selon la valeur de la *résistance totale* R du circuit RLC, On distingue trois régimes d'oscillations :

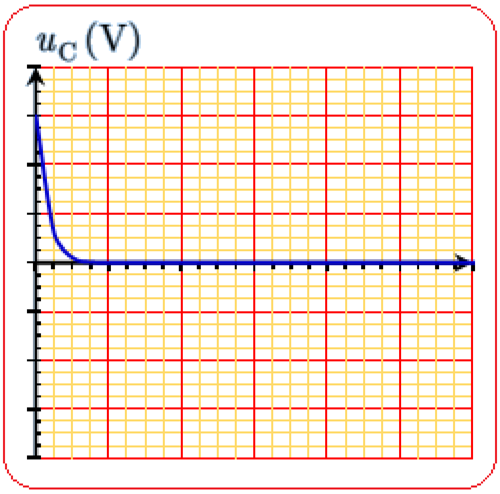
a. Régime pseudo – périodique

Le régime pseudo – périodique est observé quand la valeur de R est *faible*. Les oscillations sont libres et amorties et leur amplitude *décroit* au cours du temps.

Le régime pseudo – périodique est caractérisé par la **pseudo –**

période T, qui représente la durée entre deux passages successifs de la tension par sa valeur maximale.

b. Régime apériodique

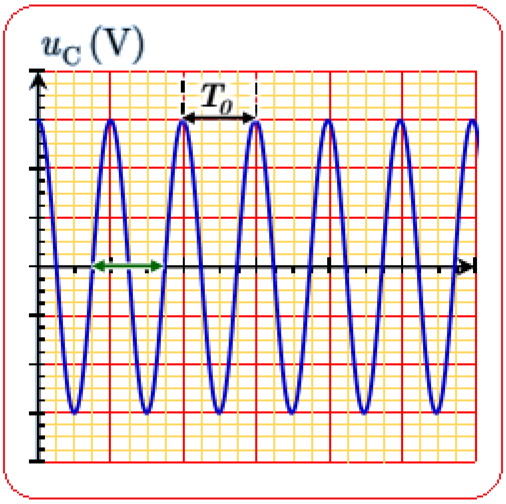


Lorsque la valeur de la résistance totale $\boldsymbol{R}$ est *élevée*, la tension $\boldsymbol{U_C(t)}$ ne représente plus d'oscillations et tend lentement vers zéro, on dit que l'amortissement est important. On appelle ce régime : **régime apériodique**.

Remarque :

Il existe un régime frontière entre les deux régimes précédents appelé *régime critique*, la valeur correspondante de la résistance est appelée *résistance critique* $\boldsymbol{R_c}$. dans ce cas la tension $\boldsymbol{U_C(t)}$ tend *rapidement* vers zéro sans oscillations.

c. Régime périodique



Le régime périodique est observé quand la valeur de $\boldsymbol{R}$ est *nulle*. La tension $\boldsymbol{U_C(t)}$ dans ce régime est *alternative* et leur amplitude *reste constante* au cours du temps.

Le régime périodique est caractérisé par sa *période propre* $\boldsymbol{T_0}$.

Remarque :

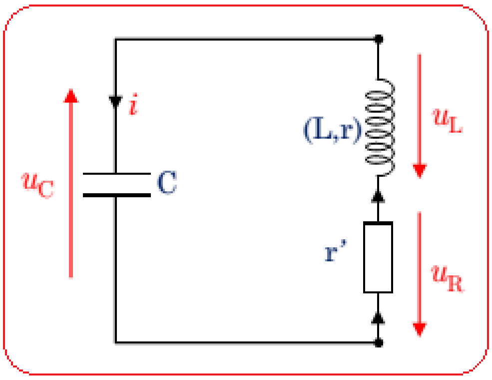
Pour calculer graphiquement la *période* $\boldsymbol{T}$, on utilise la relation suivante :

$$\boldsymbol{T = Y \times S_H}$$

$\boldsymbol{Y}$: représente le nombre des divisions correspond à une seule période.
$\boldsymbol{S_H}$: représente la sensibilité horizontale de l'oscilloscope en (*s*/div).

3. Equation différentielle d'un circuit RLC série en régime libre

On considère un circuit $\boldsymbol{RLC}$ série comme l'indique la figure ci – contre.
La loi d'additivité des tensions est :



$$\boldsymbol{U_c + U_R + U_L = 0}$$

Avec :

$$\boldsymbol{U_R = r'i} \quad ; \quad \boldsymbol{i(t) = C\,\frac{dU_c}{dt}} \quad ; \quad \boldsymbol{U_L = L\,\frac{di}{dt} + r\,i}$$

Donc :

$$\boldsymbol{U_c + r'i + L\,\frac{di}{dt} + r\,i = 0}$$

$$\boldsymbol{u_C + r'C\,\frac{dU_c}{dt} + LC\,\frac{d^2U_c}{dt^2} + rC\,\frac{dU_c}{dt} = 0}$$

Alors :

$$\boldsymbol{LC\frac{d^2U_c}{dt^2} + (r + r')\,C\frac{dU_c}{dt} + U_c = 0} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\frac{d^2U_C}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dU_C}{dt} + \frac{1}{LC}U_c = 0}$$

Avec : $\boldsymbol{R = r + r'}$

Le terme $\frac{R}{L}\frac{du_C}{dt}$ est celui qui est *responsable à l'amortissement* des oscillations. Il détermine selon la valeur de $\boldsymbol{R}$, la nature du régime observé.

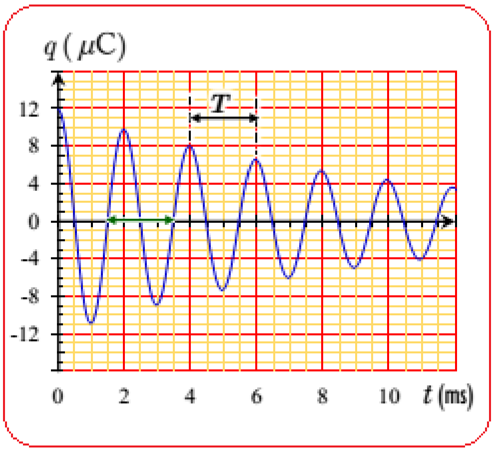
Remarque :

On a :

$$U_c + U_R + U_L = 0$$

Avec :

$U_R = r'i$; $i(t) = \frac{dq}{dt}$; $U_L = L\frac{di}{dt} + r\,i$; $U_C = \frac{q}{C}$



Donc :

$$U_C + r'i + L\frac{di}{dt} + r\,i = 0$$

$$\frac{q}{C} + (r + r')\frac{dq}{dt} + L\frac{d^2q}{dt^2} = 0$$

Soit finalement :

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}q = 0$$

C'est l'équation différentielle vérifié par la *charge* $\boldsymbol{q(t)}$.

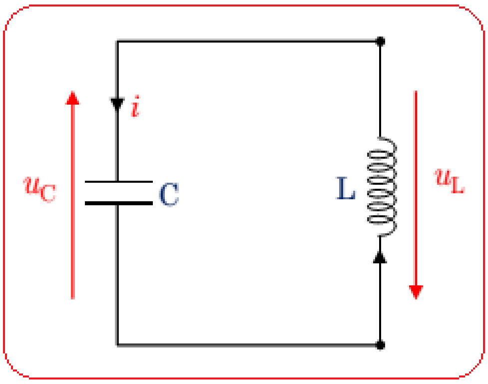
II. Oscillations non amorties d'un circuit idéal LC

On considère un circuit $\boldsymbol{LC}$ (circuit ci-contre) constitué d'un condensateur de capacité C et d'une bobine d'inductance L, considérée comme idéale (sans résistance interne).

1. Equation différentielle vérifiée par la tension *Uc (t)*

La loi d'additivité des tensions est :

$$U_c + U_L = 0$$



Avec :

$U_L = L\frac{di}{dt}$; $i(t) = C\frac{dU_c}{dt}$

Donc :

$$U_c + L\frac{di}{dt} = 0$$

$$U_c + LC\frac{d^2U_c}{dt^2} = 0$$

Soit finalement :

$$\frac{d^2U_C}{dt^2} + \frac{1}{LC}U_c = 0$$

Remarque :

On a :

$$U_c + U_L = 0$$

Avec :

$U_L = L\frac{di}{dt}$; $i(t) = \frac{dq}{dt}$; $U_C = \frac{q}{C}$

Donc :

$$\frac{q}{C} + L\,\frac{d^2q}{dt^2} = 0$$

Soit finalement :

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0$$

C'est l'équation différentielle vérifié par la *charge* $\boldsymbol{q(t)}$.

➲ Le terme responsable à l'amortissement est *nul*, donc on obtient des oscillations sinusoïdales, et le régime est périodique.

2. Solution de l'équation différentielle

Mathématiquement, la solution de l'équation différentielle $\frac{d^2U_c}{dt^2} + \frac{1}{LC}U_c = 0$ s'écrit sous la forme :

$$U_c(t) = U_m.\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$

$\boldsymbol{U_m}$: L'amplitude des oscillations (la valeur maximale atteinte par $\boldsymbol{U_c}$) en (*V*) .
$\boldsymbol{T_0}$: La période propre des oscillations de la tension $\boldsymbol{U_c}$ en (*s*).
$\boldsymbol{\varphi}$: La phase des oscillations à *t = 0* en (*rad*).

a. La période propre T_0

Pour déterminer analytiquement la période propre $\boldsymbol{T_0}$, on y remplace la solution de l'équation différentielle**.**

On a :

$$U_c(t) = U_m.\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$

Donc :

$$\frac{dU_c(t)}{dt} = -U_m.\frac{2\pi}{T_0}\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$

Alors :

$$\frac{d^2U_c(t)}{dt^2} = -U_m.\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right) = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2.U_c$$

L'équation différentielle devient :

$$-\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2.U_c(t) + \frac{1}{LC}U_c = 0$$

Donc :

$$\left(-\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 + \frac{1}{LC}\right)u_c = 0$$

Cette égalité se vérifie, si :

$$-\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 + \frac{1}{LC} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad T_0 = 2\pi.\sqrt{LC}$$

❖ **<u>Dimension de la période propre *T_0* :</u>**
On a :

$$T_0 = 2\pi.\sqrt{LC}$$

Donc :

$$[T_0] = ([L].[C])^{1/2}$$

Et on a : $U_L = L\,\frac{di}{dt}$ ☛ $[L] = \frac{[U]\,.\,T}{I}$

Et : $i = C\,\frac{dU_c}{dt}$ ☛ $[C] = \frac{I\,.\,T}{[U]}$

Finalement :

$$[T_0] = \left(\frac{[U]\,.\,T}{I} \times \frac{I\,.\,T}{[U]}\right)^{\frac{1}{2}} = (T \times T)^{\frac{1}{2}} = T$$

La période propre a une *dimension de temps*.

Remarque :

Dans le régime pseudo – périodique, on considère que :

$$T = T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$$

b. Détermination de U_m et φ

Pour déterminer U_m et φ, on utilise les conditions initiales suivants :

☻ A l'instant *t* = *0*, on bascule l'interrupteur à la position (2), ç-à-d que : $i(t = 0) = 0$

☻ A l'instant *t* = *0*, le condensateur est chargé, ç-à-d que : $u_c(t = 0) = E$

➢ On a : $i(t) = C\,\frac{dU_c}{dt}$

ç-à-d : $i(t) = -U_m\,\frac{2\pi}{T_0}\,C\,sin(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi)$

Donc : $i(t = 0) = -U_m\,\frac{2\pi}{T_0}\,C\,sin(\varphi) = 0$

Soit alors : $sin(\varphi) = 0$

Donc : $\varphi = 0$ ou $\varphi = \pi$

➢ On a : $U_c(t) = U_m\,cos(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi)$

Donc : $U_c(t = 0) = U_m\,cos(\varphi) = E$

ç-à-d : $cos(\varphi) = \frac{E}{U_m} > 0$ (*)

Si : $\varphi = 0$ ☛ $cos(0) = 1 > 0$

Si : $\varphi = \pi$ ☛ $cos(\pi) = -1 < 0$

Alors : la valeur de φ qui vérifie la relation (*) est :

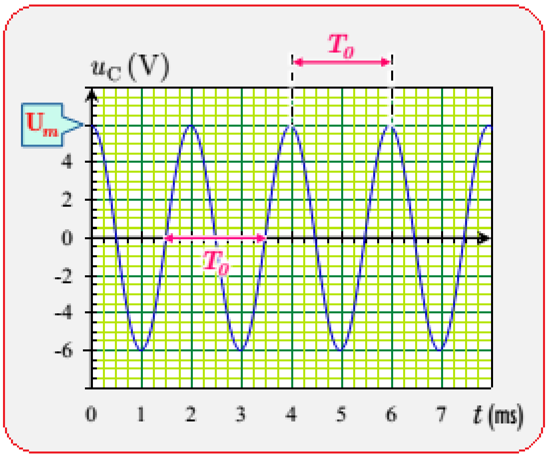
$\varphi = 0$

D'après la relation (*), on trouve :

$cos(\varphi = 0) = \frac{E}{U_m} = 1$ ☛ $U_m = E$

D'où finalement :

$$U_c(t) = E\,cos(\frac{2\pi}{T_0}\,t)$$



c. Expression de la charge $q(t)$ et de l'intensité $i(t)$

✓ **Expression de $q(t)$**

On a : $$q(t) = C\,U_C(t)$$

ç-à-d : $$q(t) = C\,E\,cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)$$

D'où finalement :

$$q(t) = Q_m\,cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)$$

Avec :

$Q_m = C\,E$: La charge maximale du condensateur.

✓ **Expression de $i(t)$**

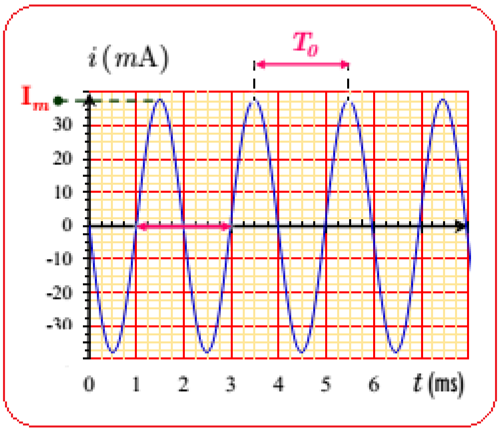
On a : $$i(t) = C\,\frac{dU_c}{dt}$$

ç-à-d : $$i(t) = -C\,E\,\frac{2\pi}{T_0}\,sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)$$

Donc : $$i(t) = -C\,E\,\frac{2\pi}{2\pi\sqrt{LC}}\,sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)$$

Donc : $$i(t) = -\,E\sqrt{\frac{C}{L}}\,sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)$$

D'où finalement : $$i(t) = -\,I_m\,cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)$$



Avec :

$I_m = -\,E\sqrt{\frac{C}{L}}$: L'intensité maximale du courant électrique dans le circuit.

III. Transfert d'énergie entre le condensateur et la bobine.

1. L'énergie totale dans un circuit LC idéal

Dans un circuit LC, l'énergie totale E_t du circuit est :

$$E_t = E_e + E_m$$

E_e : l'énergie électrique stockée dans le condensateur ☛ $E_e = \frac{1}{2}\,C\,{U_c}^2(t)$

E_m : l'énergie magnétique emmagasinée dans la bobine ☛ $E_m = \frac{1}{2}L\,i^2(t)$

Donc :

$$E_t = E_e + E_m = \frac{1}{2}\,C\,{U_c}^2 + \frac{1}{2}\,L\,i^2$$

- **Question :** Montrer que l'énergie totale de l'oscillateur LC *se conserve*.

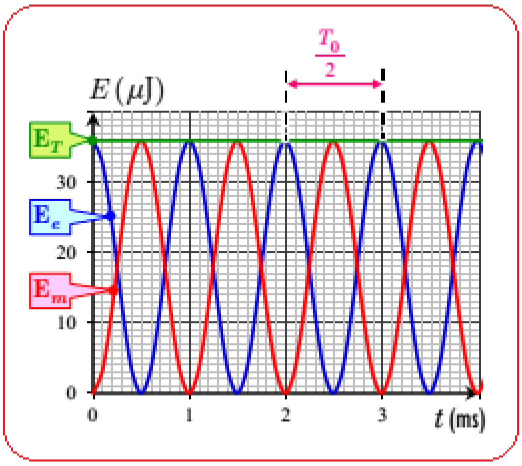
On a : $$E_t = \frac{1}{2}\,C\,{U_c}^2 + \frac{1}{2}\,L\,i^2$$

ç-à-d : $$E_t = \frac{1}{2}\,C\left(E\,cos\left(\frac{2\pi}{T_0}\,t\right)\right)^2 + \frac{1}{2}\,L\left(-\,E\sqrt{\frac{C}{L}}\,sin\left(\frac{2\pi}{T_0}\,t\right)\right)^2$$

Donc : $$E_t = \frac{1}{2}\,C\,E^2\,cos^2\left(\frac{2\pi}{T_0}\,t\right) + \frac{1}{2}\,L\,E^2\,\frac{C}{L}\,sin^2\left(\frac{2\pi}{T_0}\,t\right)$$

Alors : $$E_t = \frac{1}{2}\,C\,E^2\left(cos^2\left(\frac{2\pi}{T_0}\,t\right) + sin^2\left(\frac{2\pi}{T_0}\,t\right)\right)$$

D'où finalement : $E_t = \frac{1}{2} C E^2 = C^{te}$



- L'énergie totale d'un circuit LC idéal **est constante**, elle est égale à l'énergie initiale emmagasinée dans le condensateur.
- Lors d'oscillations *non amorties*, l'énergie électrique dans le condenseur *se transforme* en énergie magnétique dans la bobine et vice versa :

$$E_t = E_e + E_m = \frac{1}{2} C {U_m}^2 = \frac{1}{2} L {I_m}^2$$

2. L'énergie totale dans un circuit RLC série

- **Question :** Montrer que l'énergie totale de l'oscillateur RLC *diminue* au cours de temps.

On a : $$E_t = \frac{1}{2} C {U_c}^2 + \frac{1}{2} L i^2$$

ç-à-d : $$\frac{dE_t}{dt} = C U_c \frac{dU_c}{dt} + L i \frac{di}{dt}$$

Avec : $i = C \frac{dU_c}{dt}$

Donc : $$\frac{dE_t}{dt} = U_c i + LC i \frac{d^2U_c}{dt^2}$$

Alors : $$\frac{dE_t}{dt} = i \left(U_c + LC \frac{d^2U_c}{dt^2}\right)$$

L'équation différentielle du circuit RLC est :

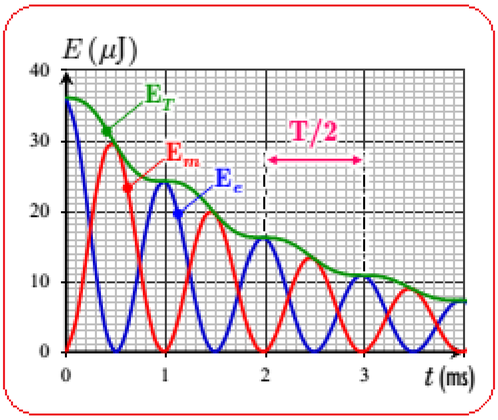
$$LC \frac{d^2U_C}{dt^2} + RC \frac{dU_c}{dt} + U_c = 0$$

ç-à-d que :

$$LC \frac{d^2U_c}{dt^2} + U_c = -RC \frac{dU_c}{dt} = -R i$$

D'où finalement : $$\frac{dE_t}{dt} = i(-R i)$$

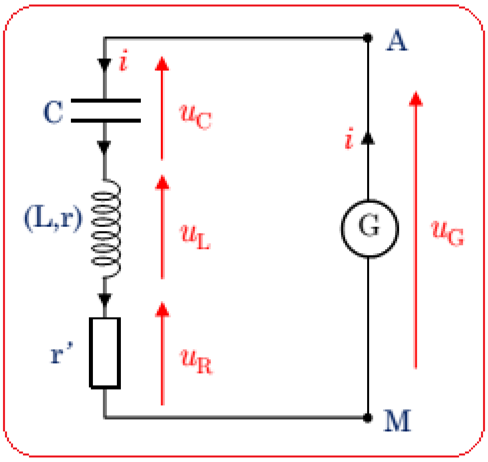
$$\frac{dE_t}{dt} = -R i^2 < 0$$



- L'énergie totale d'un circuit RLC série *décroît progressivement* par effet joule. L'énergie totale n'est plus constante et cette dissipation d'énergie due à l'existence de la résistance R.

IV. Entretien des oscillations

Il est possible d'entretenir les oscillations du circuit RLC série et d'obtenir une tension oscillante d'amplitude constante en utilisant un dispositif qui *compense l'énergie dissipée par effet joule*.



Le dispositif d'entretien est un générateur qui délivre une tension U_G proportionnelle à l'intensité i du courant électrique, tel que :

$$U_G = R_0 i$$

La loi d'additivité des tensions est :

$$U_c + U_R + U_L = U_G$$

Donc :

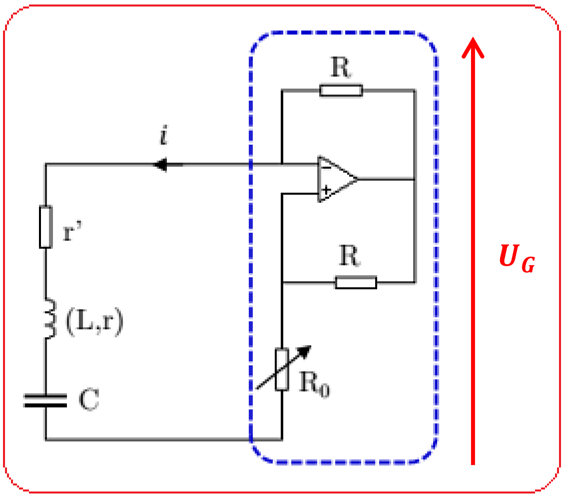
$$u_C + r'i + L\frac{di}{dt} + r\,i = R_0\,i$$

Alors :

$$LC\frac{d^2u_C}{dt^2} + (r + r' - R_0)\,C\frac{du_C}{dt} + u_c = 0$$

Soit finalement :

$$\frac{d^2u_C}{dt^2} + \left(\frac{R - R_0}{L}\right)\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC}u_c = 0$$



Lorsqu'on règle R_0 à la valeur de R, le terme responsable à l'amortissement s'annule, et l'équation différentielle devient :

$$\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{1}{LC}u_c = 0$$

On obtient alors l'équation différentielle d'un *circuit LC idéal*, les oscillations sont *entretenues* et l'amplitude *devient constante*.