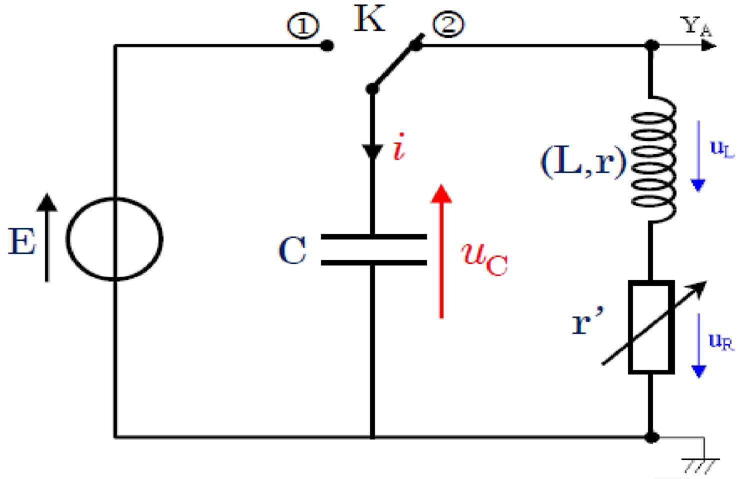
Oscillations libres dans un circuit RLC série

I- Régimes d'oscillations libres :

*) Activité expérimentale :

On réalise le circuit électrique ci-dessous, comportant un générateur de tension continue ; un condensateur de capacité C ; une bobine d'inductance L et de résistance interne r ; un conducteur ohmique de résistance R réglable et un interrupteur K ;

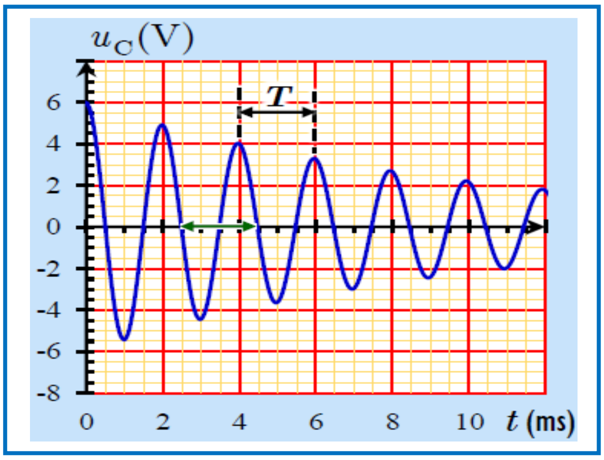


On visualise la tension u_C aux bornes du condensateur, relevée sur la voix Y_A.

- ✓ Quand l'interrupteur est en position 1, on charge le condensateur ;
- ✓ Lorsqu'on bascule l'interrupteur en position 2, on obtient un circuit RLC série.
- ✓ Lorsqu'on bascule l'interrupteur en position 2, le condensateur se décharge dans la bobine et dans le conducteur ohmique ;
- ✓ Selon la valeur de la résistance R du conducteur ohmique, on distingue deux régimes d'oscillations libres: pseudo-périodique et apériodique.

1) Régime pseudo-périodique : ($R \approx 0$)

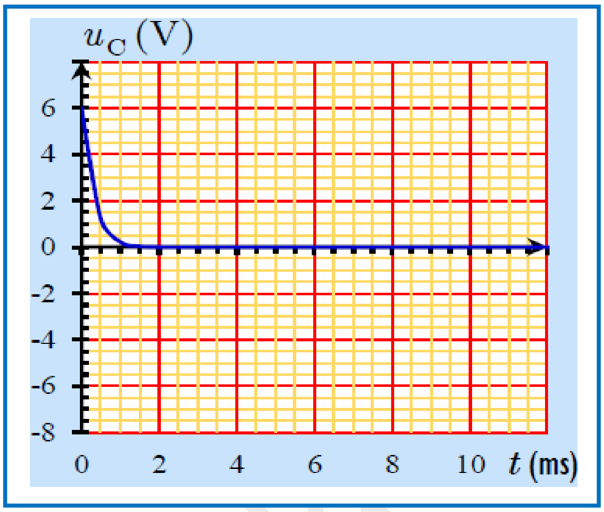
Le régime pseudo-périodique est observé quand la résistance R est très faible ; la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur présente des oscillations amorties, dont l'amplitude décroit au cours du temps :



T est appelé pseudo-période

2) Régime apériodique : ($R \gg 0$)

Lorsque la valeur de la résistance R est élevée, la tension $u_C(t)$ ne présente plus d'oscillations et tend vers zéro, on dit que l'amortissement est important :



Remarque :

- ✓ *On qualifie ces oscillations par le terme : <u>oscillations libres</u> car il n'y a eu aucun autre apport d'énergie sauf celle contenue initialement dans le condensateur.*
- ✓ *Equation différentielle d'un circuit RLC série en régime libre :*

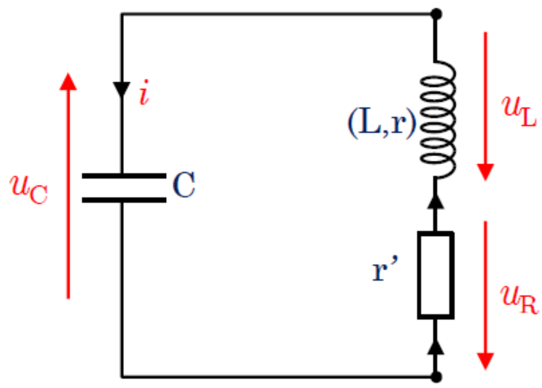
On a d'après la loi d'additivité des tensions :

$$u_L + u_R + u_c = 0 \quad : \quad (1)$$

Et on sait que : $u_L = L.\frac{di}{dt} + r.i$

Et on a d'après la loi d'Ohm : $u_R = R.i$

Et on sait que :



$$\begin{cases} i = \frac{dq}{dt} \\ et \\ q = C.u_c \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} i = C.\frac{du_c}{dt} \\ et \\ \frac{di}{dt} = C.\frac{d^2u_c}{dt^2} \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{cases} u_L = LC.\frac{d^2u_c}{dt^2} + rC.\frac{du_c}{dt} \\ et \\ u_R = RC.\frac{du_c}{dt} \end{cases}$$

Puis on remplace dans l'équation (1) *:*

$$LC.\frac{d^2u_c}{dt^2} + rC.\frac{du_c}{dt} + RC.\frac{du_c}{dt} + u_c = 0$$

$$\Longrightarrow LC.\frac{d^2u_c}{dt^2} + (R+r)C.\frac{du_c}{dt} + u_c = 0$$

Soit aussi sous la forme :

$$\boxed{\frac{d^2u_c}{dt^2} + \frac{(R+r)}{L}.\frac{du_c}{dt} + \frac{1}{LC}.u_c = 0}$$

L'équation différentielle du circuit

$\Longrightarrow$ *On peut établir aussi une équation différentielle du circuit RLC en fonction de la charge q : (voir dipôle RC)*

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{(R+r)}{L}.\frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}.q = 0$$

Remarque :

- *Le terme :* $\frac{(R+r)}{L}\frac{du_c}{dt}$ *représente le phénomène d'amortissement. Il détermine selon la valeur de R, la nature du régime observé.*
- *le phénomène d'amortissement résulte d'une dissipation de l'énergie par effet Joule (sous forme de chaleur) dans les résistances du circuit.*

II- Oscillations non amorties d'un circuit LC idéal :

On considère un circuit LC, constitué d'un condensateur de capacité C et d'une bobine idéale $(r = 0)$ *d'inductance L*

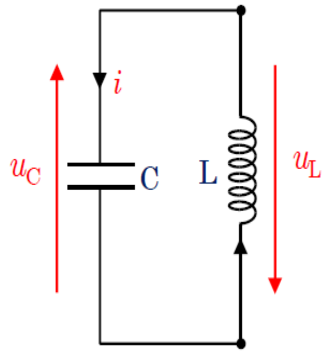
N.B : Il s'agit d'un cas théorique, irréalisable dans la pratique.

1) Equation différentielle du circuit :

On a d'après la loi d'additivité des tensions :

$u_L + u_c = 0 \quad : (1)$

Et on a : $u_L = L.\frac{di}{dt}$



Et on sait que :

$$\begin{cases} i = \frac{dq}{dt} \\ \text{et} \\ q = C.u_c \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} i = C.\frac{du_c}{dt} \\ \text{et} \\ \frac{di}{dt} = C.\frac{d^2u_c}{dt^2} \end{cases}$$

Donc : $u_L = LC.\frac{d^2u_c}{dt^2}$

Puis on remplace dans l'équation (1) *:* $LC.\frac{d^2u_c}{dt^2} + u_c = 0$

Soit aussi sous la forme :

$$\boxed{\frac{d^2u_c}{dt^2}+\frac{1}{LC}.u_c=0}$$

L'équation différentielle du circuit

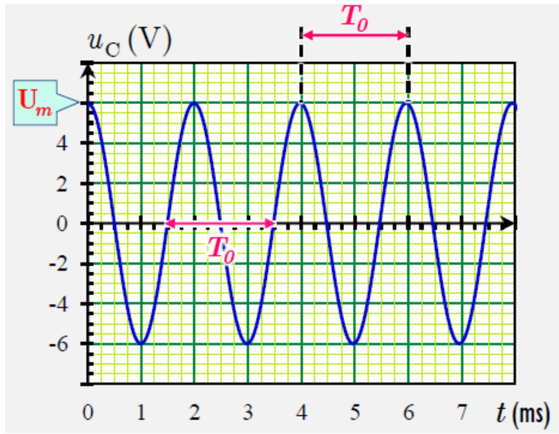
$\Longrightarrow$ *On peut établir aussi une équation différentielle du circuit LC en fonction de la charge q : (voir dipôle RC)*

$$\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{1}{LC}.q=0$$

2) Solution de l'équation différentielle :

La solution de l'équation différentielle précédente s'écrit sous la forme :

$u_C(t)=U_m.cos(\frac{2\pi}{T_0}t+\varphi)$ *où :*



U_m *: l'amplitude des oscillations (la valeur maximale atteinte par* u_C*), en* (V) *;*

T_0 *: la période propre des oscillations, en* (s) *;*

$\frac{2\pi}{T_0}t+\varphi$ *: la phase des oscillations à l'instant t, en* (rad) *;*

φ *: la phase des oscillations à l'instant* $t=0$*, en* (rad) *;*

On peut définir aussi :

$f_0=\frac{1}{T_0}$ *: la fréquence propre des oscillations, en* (Hz) *;*

$\omega_0=\frac{2\pi}{T_0}$ *:la pulsation propre des oscillations, en* $({}^{rad}/_{s})$.

a- Détermination de la période propre T_0 :

On a : $u_C(t)=U_m.cos(\frac{2\pi}{T_0}t+\varphi)$

Donc : $\frac{du_C}{dt}=-U_m.\left(\frac{2\pi}{T_0}\right).sin(\frac{2\pi}{T_0}t+\varphi)$

Et $\frac{d^2u_C}{dt^2}=-U_m.\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2.cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t+\varphi\right)=-\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2.u_C(t)$

Puis on remplace dans l'équation différentielle :

$$-\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2.u_C(t)+\frac{1}{LC}.u_C(t)=0$$

$$\Rightarrow \cancel{-}\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2.\cancel{u_C(t)} = \cancel{-}\,\frac{1}{LC}.\cancel{u_C(t)}$$

Donc : $\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 = \frac{1}{LC}$ *c.à.d :* $\frac{2\pi}{T_0} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

D'où :

$$\boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{LC}}$$

➤ **Montrons que T_0 est homogène à un temps :**

- Analyse dimensionnelle :

On a $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$ *; donc :* $[T_0] = ([L].[C])^{1/2}$

Et on a, pour une bobine idéale : $u_L = L.\frac{di}{dt}$

$\Rightarrow \quad [U] = [L].\frac{[I]}{[t]}$ *c.à.d. que :* $[L] = \frac{[U]}{[I]}.[t]$

Et on sait que : $i = C.\frac{du_C}{dt}$

$\Rightarrow \quad [I] = [C].\frac{[U]}{[t]}$ *c.à.d. que :* $[C] = \frac{[I]}{[U]}.[t]$

Donc : $[T_0] = \left(\frac{\cancel{[U]}}{\cancel{[I]}}.[t].\frac{\cancel{[I]}}{\cancel{[U]}}.[t]\right)^{1/2} = ([t]^2)^{1/2} = [t]$

D'où : T_0 *est homogène à un temps et s'exprime en seconde (s) .*

Remarque :

La pseudo-période T est approximativement égale à la période propre T_0 *et on écrit :* $T \approx T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$.

b- Détermination de U_m et φ :

Pour déterminer U_m *et* φ *on utilise les conditions initiales* $(t = 0)$, *de l'intensité* $i(t)$ *et de la tensions* $u_C(t)$ *;*

$$A\ t = 0,\ on\ a : \begin{cases} i(t=0) = 0 \\ \quad et \\ u_C(t=0) = E \end{cases}$$

- *Pour* $i(t)$ *:*

On sait que : $i(t) = C.\frac{du_C}{dt}$ *avec :* $u_C(t) = U_m.\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$

Donc : $i(t) = -CU_m.\left(\frac{2\pi}{T_0}\right).\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$

$$A\ t = 0,\ on\ a :\ i(t=0) \underset{\uparrow\ \text{Théoriquement}}{=} -CU_m.\left(\frac{2\pi}{T_0}\right).\sin(\varphi) \underset{\uparrow\ \text{C.I}}{=} 0$$

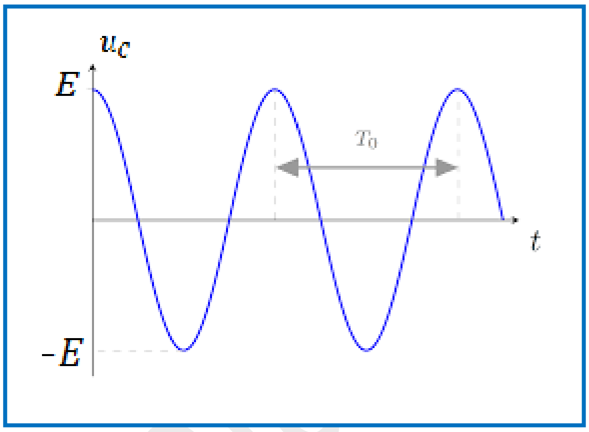
$\Longrightarrow sin(\varphi) = 0 \quad \leftrightarrow \begin{cases} \varphi = 0 \\ \varphi = \pi \end{cases}$

- *Pour* $u_C(t)$:

On a : $u_C(t) = U_m.cos(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi)$

A $t = 0$, *on a :* $u_C(t = 0) \underset{\uparrow}{=} U_m.cos(\varphi) \underset{\uparrow}{=} E$

Théoriquement *C.I*



Comme $U_m > 0$ *et* $E > 0$; *alors :* $\begin{cases} \varphi = 0 \\ \text{et} \\ U_m = E \end{cases}$

D'où : $u_C(t) = E.cos(\frac{1}{\sqrt{LC}}t)$

$\Longrightarrow$ *Il s'agit donc d'un régime périodique, de période propre* T_0.

c- *Expression de la charge* $q(t)$ *et de l'intensité* $i(t)$:

- *Expression de* $q(t)$:

On sait que : $q(t) = C.u_C(t)$ *avec :* $u_C(t) = U_m.cos(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi)$

$\Longrightarrow q(t) = CU_m.cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right) = Q_m.cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$ *avec :* $Q_m = CU_m$

- *Expression de* $i(t)$:

On sait que : $i(t) = C.\frac{du_C}{dt}$ *avec :* $u_C(t) = U_m.cos(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi)$

$\Longrightarrow i(t) = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)CU_m.sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right) \quad = -I_m.sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$

avec : $I_m = \left(\frac{2\pi}{T_0}\right).CU_m$

Application n°1 : Exercice n° 1 ; Série n°7

الصفحة 8	RS31	الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا –الدورة الاستدراكية 2011 – الموضوع – مادة: الفيزياء والكيمياء - شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (الترجمة الفرنسية)

Exercice 2 (5,25 points) : Les oscillateurs électriques

La réception des ondes électromagnétiques se fait par une antenne qui transforme l'onde électromagnétique en un signal électrique de fréquence égale à celle de l'onde captée . On peut sélectionner une station émettrice en accordant la fréquence propre du dipôle LC lié à l'antenne à celle de l'onde émise par cette station .

L'objectif de cet exercice est d'étudier les oscillations électriques libres et forcées dans un circuit RLC et leur application dans le circuit d'accord .

On réalise le montage électrique représenté dans la figure (1) qui comprend :
- un générateur de force électromotrice E=6,0 V et de résistance interne négligeable ;
- un condensateur (C) de capacité C réglable ;
- une bobine (B) d'inductance L réglable et de résistance négligeable ;
- un conducteur ohmique (D) de résistance R réglable ;
- un interrupteur (K).

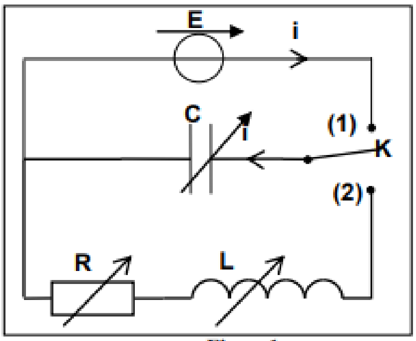


Figure1

1- étude des oscillations libres amorties dans un circuit RLC.

Expérience 1 :

On règle la résistance sur la valeur R=20Ω et l'inductance sur la valeur 1,0H et on règle la capacité du condensateur sur C=60μF.

Après avoir chargé complètement le condensateur (C),on bascule l'interrupteur (K) à l'instant t=0 à la position (2) .

Un dispositif approprié permet de visualiser l'évolution des tensions u_c aux bornes du condensateur (C) , u_R aux bornes du conducteur ohmique (D) et u_L aux bornes de la bobine (B) .

On obtient les courbes (a) , (b) et (c) représentées dans la figure(2)

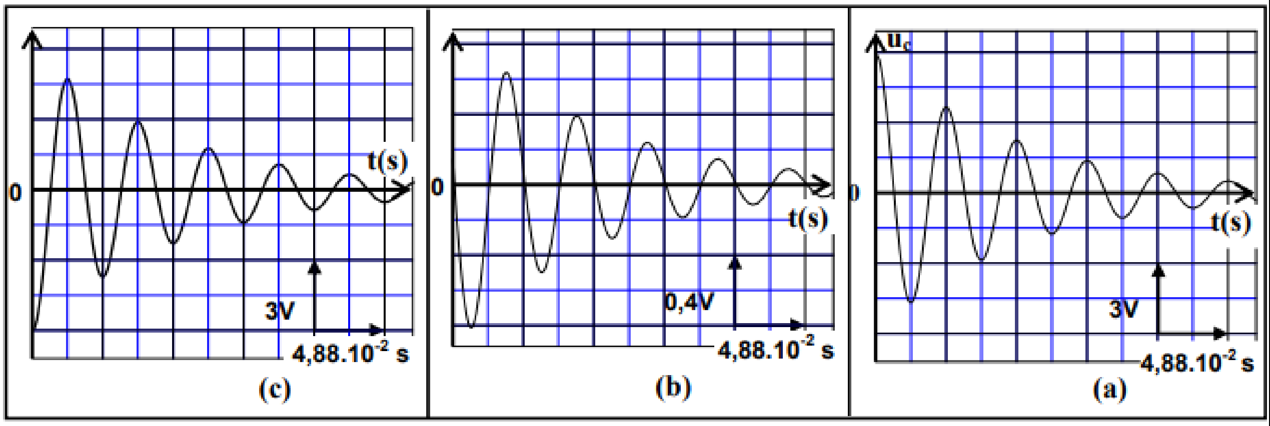


Figure2

0,5 **1.1-** la courbe (a) représente l'évolution de la tension u_c en fonction du temps .
quelle est parmi les deux courbes (b) et (c) celle correspondant à la tension u_L ? justifier la réponse .

1.2- A partir des courbes précédentes :

0,5 a) Déterminer la valeur de l'intensité de courant passant dans le circuit à l'instant $t_1=8,54.10^{-2}$ s .

0,5 b) Préciser le sens du courant dans le circuit entre les instants t_1 et $t_2 = 10,98.10^{-2}$ s .

0,5 **1.3-** Etablir l'équation différentielle vérifiée par la charge q du condensateur (C) .

0,5 **1.4-** La solution de l'équation différentielle s'écrit sous la forme $q(t) = A.e^{-\frac{R}{2L}t}.\cos(\frac{2\pi}{T}t - 0{,}077)$.
Déterminer la valeur de la constante A en donnant le résultat avec trois chiffres significatifs .

2- L'étude énergétique des oscillations libres dans un circuit LC.

On utilise le montage représenté dans la figure (1) ,et on règle la résistance R sur la valeur R=0Ω et la capacité du condensateur sur la valeur C = 60 µF , dans ce cas l'expression de q(t) s'écrit sous la forme : $q(t) = q_m.\cos(\frac{1}{\sqrt{L.C}}t)$.

1 **2.1-** établir l'expression littérale de l'énergie électrique E_e et celle de l'énergie magnétique E_m en fonction du temps .

0,75 **2.2-** Montrer que l'énergie totale E_T de l'oscillateur se conserve aux cours du temps .
Calculer sa valeur .

Réponse :

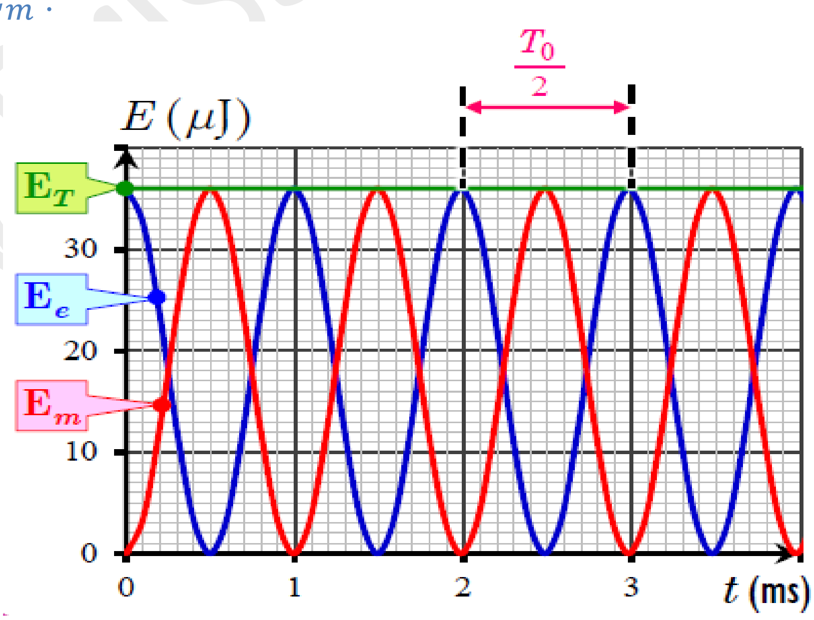
III- Transfert d'énergie entre le condensateur et la bobine :

On a vu dans les chapitres précédents que le condensateur emmagasine une énergie électrique $E_e = \frac{1}{2}.C.u_C{}^2$, *alors que la bobine stock une énergie magnétique* $E_m = \frac{1}{2}.L.i^2$.

Que se passe-t-il du point de vue énergétique lorsqu'on connecte un condensateur chargé à une bobine ?

1) Energie dans un circuit LC idéal :

La figure ci-dessous montre l'évolution au cours du temps des énergies E_e , E_m *et* $E_T = E_e + E_m$:



$\Longrightarrow$ *Lorsque l'énergie électrique* E_e *diminue, l'énergie magnétique* E_m *augmente et vice-versa. Donc il y a échange d'énergie entre le condensateur et la bibine.*
On constate que l'énergie totale E_T *du circuit reste constante (conservation de l'énergie totale) ; car il n y a pas de dissipation de l'énergie par effet Joule.*

Remarque :

- *Montrons que l'énergie totale du circuit LC idéal se conserve :*

On a : $E_T = E_e + E_m = \frac{1}{2}.C.u_C{}^2 + \frac{1}{2}.L.i^2$

Donc : $\frac{dE_T}{dt} = C.u_C.\frac{du_C}{dt} + L.i.\frac{di}{dt}$

Et on sait que : $i = C.\frac{du_C}{dt}$ *et* $\frac{di}{dt} = C.\frac{d^2u_C}{dt^2}$

$\Longrightarrow \frac{dE_T}{dt} = i.u_C + i.L.C.\frac{d^2u_C}{dt^2} = i(u_C + L.C.\frac{d^2u_C}{dt^2})$

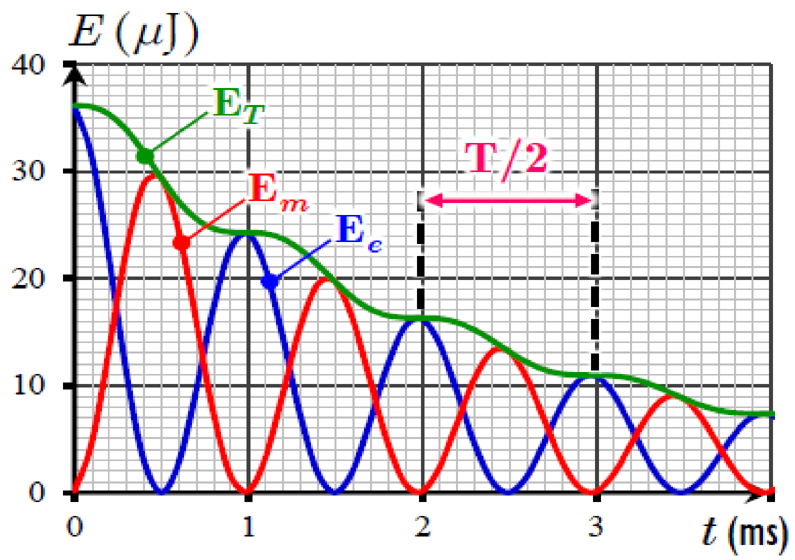
Et on a d'après l'équation différentielle du circuit LC idéal : $L.C.\frac{d^2u_C}{dt^2} + u_C = 0$

Donc : $\frac{dE_T}{dt} = 0$ *c.à.d que :* $E_T = Cte$

D'où : L'énergie totale du circuit LC idéal se conserve.

2) Energie dans un circuit RLC série :

La figure ci-dessous montre l'évolution au cours du temps des énergies E_e , E_m *et* $E_T = E_e + E_m$ *:*



On constate que l'énergie totale E_T *du circuit diminue en fonction du temps(pas de conservation de l'énergie totale) ; car il y a dissipation de l'énergie par effet Joule (se forme de chaleur) dans les résistances du circuit.*

Remarque :

- *Montrons que, l'énergie totale du circuit RLC série ; diminue en fonction du temps :*

On a : $E_T = E_e + E_m = \frac{1}{2}.C.{u_C}^2 + \frac{1}{2}.L.i^2$

Donc : $\frac{dE_T}{dt} = C.u_C.\frac{du_C}{dt} + L.i.\frac{di}{dt}$

Et on sait que : $i = C.\frac{du_c}{dt}$ *et* $\frac{di}{dt} = C.\frac{d^2u_c}{dt^2}$

$\Longrightarrow \frac{dE_T}{dt} = i.u_C + i.L.C.\frac{d^2u_c}{dt^2} = i(u_C + L.C.\frac{d^2u_c}{dt^2})$

Et on a d'après l'équation différentielle du circuit RLC série :

$L.C.\frac{d^2u_c}{dt^2} + (R+r)C.\frac{du_c}{dt} + u_C = 0$

$\Longrightarrow L.C.\frac{d^2u_c}{dt^2} + u_C = -(R+r)C.\frac{du_c}{dt} = -(R+r).i$

Donc : $\frac{dE_T}{dt} = i(-(R+r).i)$

$\Longrightarrow \frac{dE_T}{dt} = -(R+r).i^2$

c.à.d que : $\frac{dE_T}{dt} < 0$

D'où : l'énergie totale E_T *du circuit RLC série ; diminue en fonction du temps* (E_T *est une fonction décroissante en fonction du temps*).

Application n°2 : Exercice n° 2 ; Série n° 7

الصفحة 5/8	NS31	الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا –الدورة العادية 2011 – الموضوع – مادة: الفيزياء والكيمياء - شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (الترجمة الفرنسية)

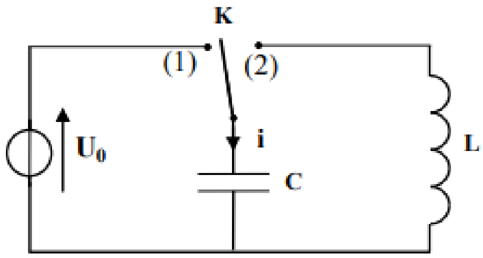
Exercice 2 (5,25 points) : Echange d'énergie entre une bobine et un condensateur

Le dipôle LC se comporte comme un oscillateur dans lequel s'effectue périodiquement un échange d'énergie entre le condensateur et la bobine ; mais ,en réalité ,l'énergie totale de ce dipôle ne reste pas constante au cours du temps à cause des pertes d'énergie par effet joule .
L'objectif de cet exercice est d'étudier l'échange énergétique entre le condensateur et la bobine ainsi que la réponse d'une bobine à un échelon de tension électrique .

1- Oscillations électriques dans le cas où la bobine a une résistance négligeable .

On considère le montage de la figure 1 qui comprend :
- Un générateur idéal de tension qui donne une tension U_0 ;
- Une bobine d'inductance L et de résistance négligeable ;
- Un condensateur de capacité $C=8,0.10^{-9}$ F ;
- Un interrupteur K .

On charge le condensateur sous la tension U_0 en plaçant l'interrupteur dans la position (1) .
Lorsque le condensateur est complètement chargé , on bascule l'interrupteur dans la position (2) à l'instant t=0 , il passe alors dans le circuit un courant d'intensité i .



الشكل 1

A l'aide d'un dispositif approprié , on visualise la courbe représentant les variations de l'intensité i en fonction du temps (figure2)et la courbe représentant les variations de l'énergie magnétique E_m emmagasinée dans la bobine en fonction du temps (figure3).

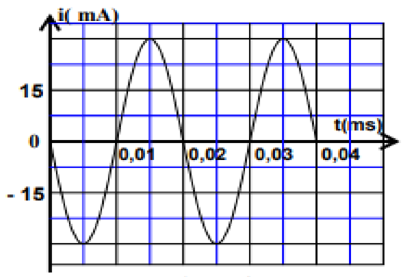


Figure 2

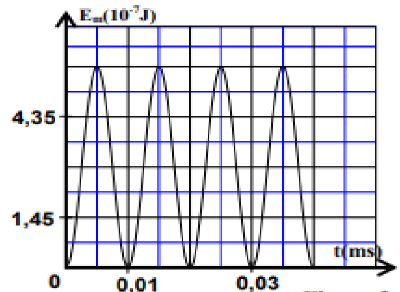


Figure 3

0,5 **1.1-** Trouver l'équation différentielle vérifiée par l'intensité i du courant.

1.2- A l'aide des figures (2) et (3) :

0,75 **a-** Déterminer la valeur de l'énergie totale E_T du circuit LC et en déduire la valeur de la tension U_0 .

0,5 **b-** Déterminer la valeur de L.

2- Réponse d'une bobine de résistance négligeable à un échelon de tension .

On monte la bobine précédente en série avec un conducteur ohmique de résistance R=100Ω .On applique entre les bornes du dipôle obtenu un échelon de tension de valeur ascendante E et de valeur descendante nulle et de période T. On visualise à l'aide d'un dispositif approprié l'évolution de la tension u entre les bornes du générateur, la tension u_R aux bornes du conducteur ohmique et la tension u_L aux bornes de la bobine ; on obtient alors les courbes (1) , (2) et (3) représentées dans la figure 4 .

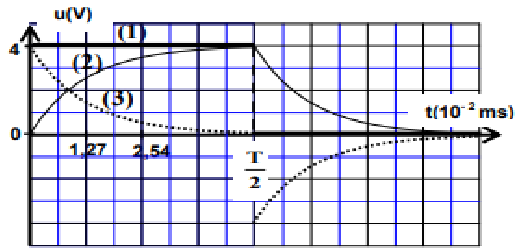


Figure 4

0,5 **2.1-** Etablir l'équation différentielle vérifiée par l'intensité du courant i(t) dans l'intervalle $0 \leqslant t < \frac{T}{2}$.

2.2- La solution de cette équation différentielle s'écrit sous la forme : $i(t) = I_p(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$ avec I_p et τ des constantes .

0,5 **a-** Associer chacune des tensions u_L et u_R à la courbe correspondante dans la figure 4 .

0,5 **b-** A l'aide des courbes de la figure 4 ,trouver la valeur de I_p.

0,5 **2.3-** L'expression de l'intensité du courant s'écrit dans l'intervalle $\frac{T}{2} \leq t < T$ (sans changer l'origine du temps) sous la forme : $i(t) = A.e^{-\frac{t}{\tau}}$ avec A et τ des constantes .

Montrer que l'expression de l'intensité du courant à l'instant $t_1 = \frac{3T}{4}$ s'écrit sous la forme $i(t_1) = I_p.e^{-2}$.

3- Les oscillations électriques dans le cas où la bobine a une résistance non négligeable .

On répète l'expérience en utilisant le montage représenté dans la figure 1 en remplaçant la bobine précédente par une autre bobine ayant la même inductance L , mais sa résistance r n'est pas négligeable .
Après avoir chargé complètement le condensateur , on bascule l'interrupteur dans la position (2) .
La figure 5 représente l'évolution de la charge q du condensateur en fonction du temps .

0,5 **3.1-** Choisir la ou les réponses justes :

L'énergie emmagasinée dans la bobine est :

a) maximale à l'instant $t_1 = 5.10^{-3}$ms .
b) minimale à l'instant $t_1 = 5.10^{-3}$ms .
c) maximale à l'instant $t_2 = 10^{-2}$ms .
d) minimale à l'instant $t_2 = 10^{-2}$ms .

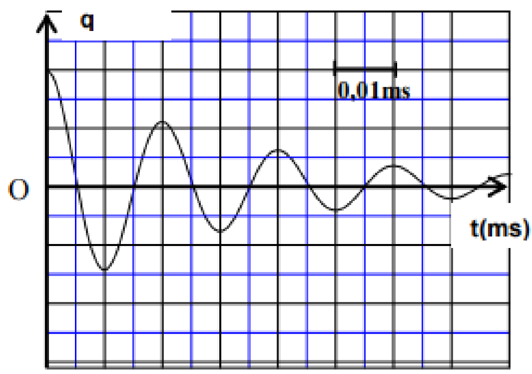


Figure 5

0,5 **3.2-** Montrer que l'équation différentielle vérifiée par la charge du condensateur s'écrit sous la forme :

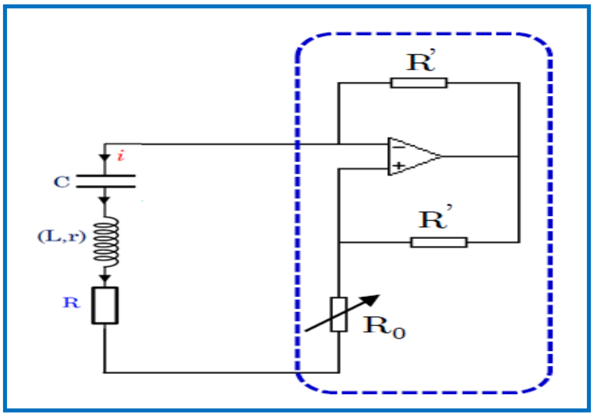
$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\lambda \cdot \frac{dq}{dt} + \frac{4\pi^2}{T_0^2} \cdot q = 0$$

avec T_0 la période propre du circuit et $\lambda = \frac{r}{2L}$.

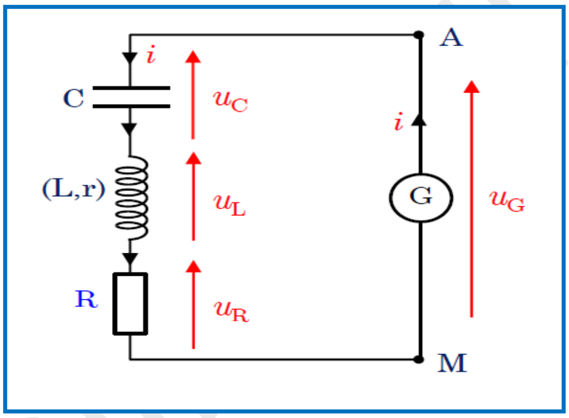
0,5 **3.3-** sachant que l'expression de la pseudo période T des oscillations est $T = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{T_0^2} - \frac{\lambda^2}{4\pi^2}}}$; trouver la condition que doit vérifier r par rapport à $\frac{L}{C}$ pour que $T \approx T_0$.

IV- *Entretien des oscillations :*

Dans le cas d'un circuit RLC série, l'amplitude des oscillations décroît du fait d'une dissipation d'énergie par effet Joule dans les résistances du circuit. Toutefois, il est possible d'entretenir les oscillations et d'obtenir, pour les grandeurs oscillantes, une amplitude constante ; on utilise pour cela un dispositif qui fournit et compense continuellement l'énergie dissipée par effet Joule .



<≡>



Avec : $U_G = K.i$

« Le dispositif d'entretien des oscillations est hors programme ».

- ***Equation différentielle du circuit :***

  On a d'après la loi d'additivité des tensions :

$$u_L + u_R + u_c = U_G \quad : \quad (1)$$

Et on sait que : $u_L = L.\frac{di}{dt} + r.i$

Et on a d'après la loi d'Ohm : $u_R = R.i$

Et on a : $U_G = K.i$

Et on sait que :

$$\begin{cases} i = \frac{dq}{dt} \\ et \\ q = C.u_c \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} i = C.\frac{du_c}{dt} \\ et \\ \frac{di}{dt} = C.\frac{d^2u_c}{dt^2} \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{cases} u_L = LC.\frac{d^2u_c}{dt^2} + rC.\frac{du_c}{dt} \\ u_R = RC.\frac{du_c}{dt} \quad et \\ U_G = KC.\frac{du_c}{dt} \end{cases}$$

Puis on remplace dans l'équation (1) *:*

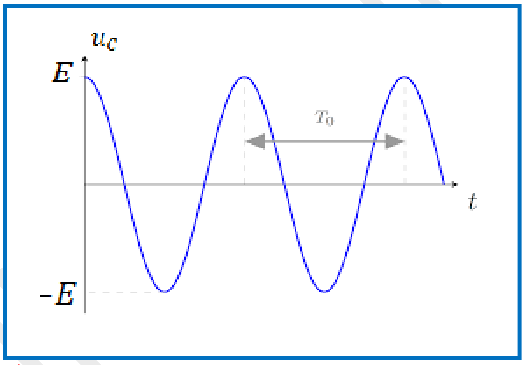
$$LC.\frac{d^2u_c}{dt^2} + (R+r)C.\frac{du_c}{dt} + u_c = KC.\frac{du_c}{dt}$$

$$\Longrightarrow LC.\frac{d^2u_c}{dt^2} + (R_t - K)C.\frac{du_c}{dt} + u_c = 0 \quad avec : R_t = R + r$$

Lorsque ; $K = R_t$*, l'équation différentielle du circuit devient :* $LC.\frac{d^2u_c}{dt^2} + u_c = 0$

Qui est l'équation différentielle d'un circuit LC idéal.

Comme ce que nous avons rencontré, la solution de cette équation différentielle est une fonction sinusoïdale :



$\Longrightarrow$ *L'énergie totale du circuit reste alors constante.*

Remarque :

Au niveau énergétique, le rôle du dispositif d'entretien est de compenser l'énergie perdu par effet Joule dans les résistances du circuit.

Application n°3 : Exercice n° 3 ; Série n°7

الصفحة 5 / 8 | NS30 F | الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا – الدورة العادية 2017 – الموضوع
– مادة: الفيزياء والكيمياء – شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) – خيار فرنسية

L'électricité :(5 points)

Le condensateur, le conducteur ohmique et la bobine sont utilisés dans les circuits de divers montages électriques tels les circuits intégrés, les amplificateurs, les appareils d'émission et de réception...
Cet exercice vise l'étude de:

-la charge d'un condensateur et sa décharge dans un conducteur ohmique puis dans une bobine.
-la réception d'une onde électromagnétique.

On prendra : $\pi = \sqrt{10}$.

1-Charge d'un condensateur et sa décharge dans un conducteur ohmique :

On réalise le montage représenté sur le schéma de la figure 1.
Ce montage comprend:

-un générateur idéal de courant ;
-un conducteur ohmique de résistance R ;
-un condensateur de capacité C , initialement non chargé ;
-un microampèremètre ;
-un interrupteur K .

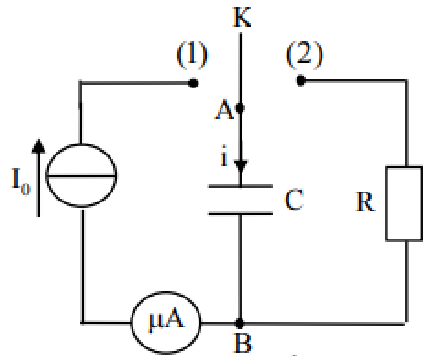


Figure 1

On place l'interrupteur K en position (1) à un instant de date $t=0$. Le microampèremètre indique $I_0 = 0{,}1\,\mu A$. Un système de saisie informatique convenable permet d'obtenir la courbe représentant les variations de la charge q du condensateur en fonction de la tension u_{AB} entre ses bornes(figure 2).

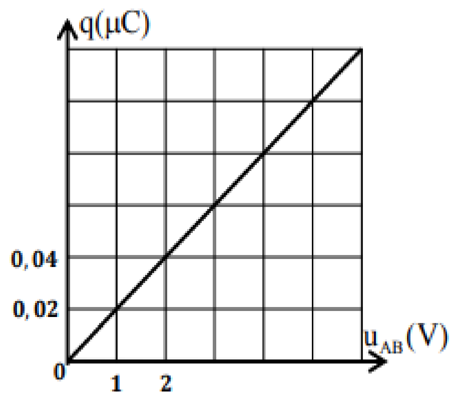


Figure 2

0,25 **1-1-**Montrer que la capacité C du condensateur est $C = 20\,nF$.

0,5 **1-2-**Déterminer la durée nécessaire pour que la tension aux bornes du condensateur prenne la valeur $u_{AB} = 6V$.

1-3-Lorsque la tension aux bornes du condensateur prend la valeur $u_{AB} = U_0$, on place l'interrupteur K en position (2) à un instant choisi comme une nouvelle origine des dates $(t=0)$ .La courbe de la figure 3 représente les variations de $\ln(u_{AB})$ en fonction du temps (u_{AB} est exprimée en V) .

0,25 **1-3-1-** Etablir l'équation différentielle vérifiée par la tension $u_{AB}(t)$.

1 **1-3-2-** Sachant que la solution de l'équation différentielle est de la forme : $u_{AB}(t) = U_0 e^{-\alpha t}$ où α est une constante positive. Trouver la valeur de U_0 et celle de R .

0,5 **1-3-3-** Déterminer la date t_1 où l'énergie emmagasinée par le condensateur est égale à 37% de sa valeur à $t=0$.

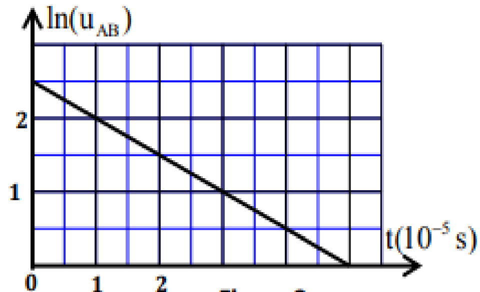


Figure 3

2- Décharge du condensateur dans une bobine :

On recharge le condensateur précédent et on réalise le montage représenté sur la figure 4 qui comporte en plus de ce condensateur:

- une bobine (b) d'inductance L et de résistance r ;
- un conducteur ohmique de résistance $R_0 = 12\Omega$;
- un interrupteur K.

On ferme le circuit et on visualise la tension $u_{R_0}(t)$ aux bornes du conducteur ohmique. On observe des oscillations pseudopériodiques.

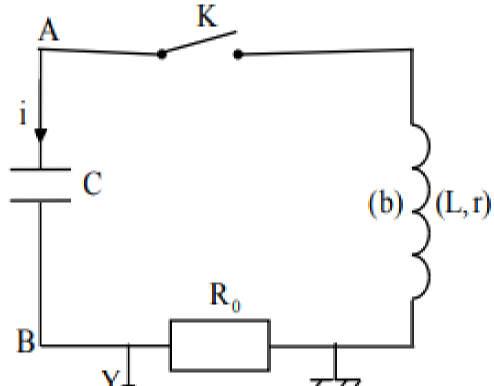


Figure 4

0,5 **2-1-** Etablir l'équation différentielle vérifiée par la tension $u_{R_0}(t)$ entre les bornes du conducteur ohmique.

2-2- Pour obtenir des oscillations électriques entretenues, on insère en série dans le circuit un générateur G délivrant une tension, selon la convention générateur, $u_G(t) = k.i(t)$ où k est un paramètre ajustable $(k > 0)$. En ajustant le paramètre k sur la valeur $k = 20$ (exprimée dans le système d'unités international) la tension $u_{R_0}(t)$ devient sinusoïdale.

0,25 **2-2-1-**Déterminer la valeur de r.

0,5 **2-2-2-**La courbe de la figure 5 représente l'évolution au cours du temps de l'énergie magnétique E_m emmagasinée dans la bobine.

Trouver la valeur de L et celle de $U_{c_{max}}$ la tension maximale aux bornes du condensateur.

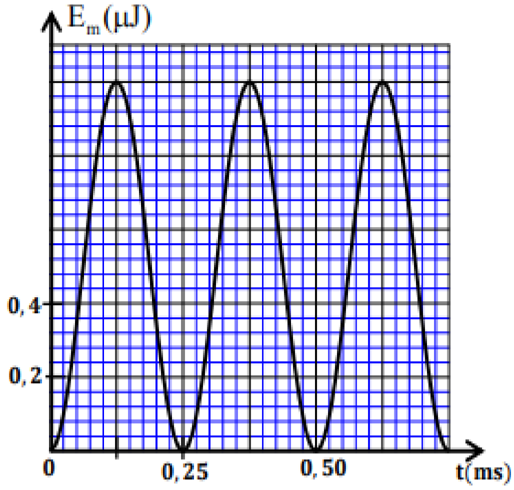


Figure 5