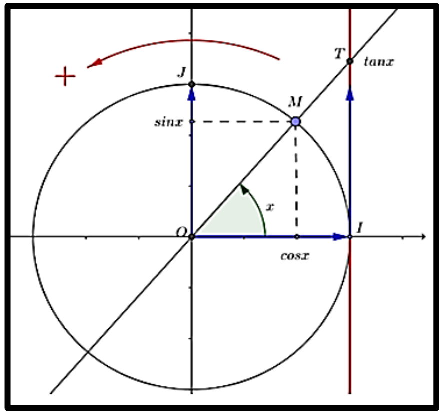
I. Rappels :

1) Formule de base

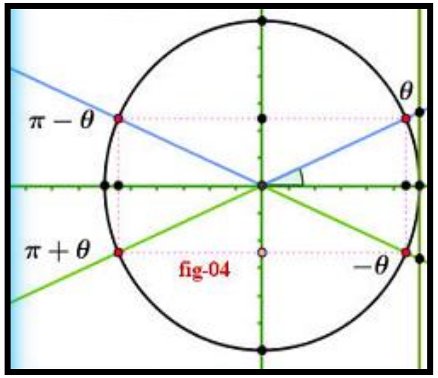
Soient $\theta \in \mathbb{R}$

- $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$
- $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$
- $1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$
- $-1 \le \cos\theta \le 1$
- $-1 \le \sin\theta \le 1$
- $\cos(\theta + 2k\pi) = \cos(\theta)$; $k \in \mathbb{Z}$
- $\sin(\theta + 2k\pi) = \sin(\theta)$; $k \in \mathbb{Z}$
- $\tan(\theta + k\pi) = \tan(\theta)$; $k \in \mathbb{Z}$



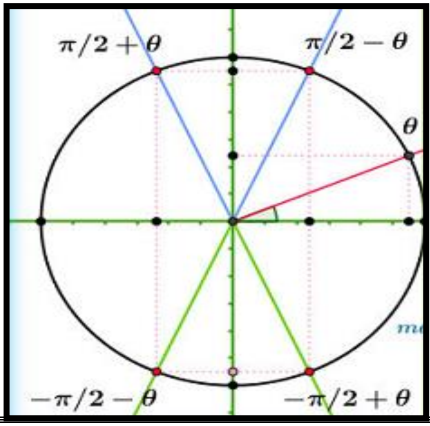
A partir de cercle trigonométrique en dessous :

- $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$
- $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$
- $\tan(-\theta) = -\tan(\theta)$
- $\sin(\pi - \theta) = \sin(\theta)$
- $\cos(\pi - \theta) = -\cos(\theta)$
- $\tan(\pi - \theta) = -\tan(\theta)$
- $\sin(\pi + \theta) = -\sin(\theta)$
- $\cos(\pi + \theta) = -\cos(\theta)$
- $\tan(\pi + \theta) = \tan(\theta)$



A partir de cercle trigonométrique en dessous

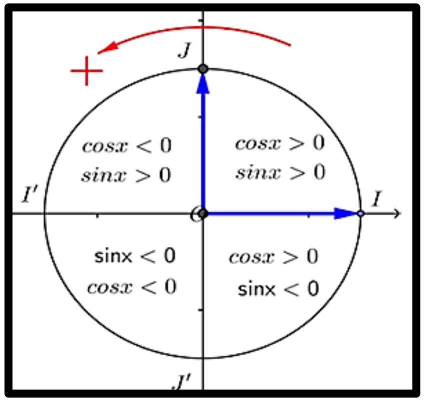
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$
- $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{1}{\tan\theta}$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos\theta$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin\theta$
- $\tan\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \frac{-1}{\tan\theta}$



2) Tableau des valeurs importantes

x	0	$\pi/3$	$\pi/4$	$\pi/6$	$\pi/2$
Sin(x)	0	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	1
Cos(x)	1	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	0
Tan(x)	0	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$	FI

3) Signe de cos et sin



4) Equation-inéquation trigonométrique

- **Equation de la forme $\cos(x) = a$ avec $a \in [-1;1]$**

On cherche α de $\mathbb{R}$ tel que $a = \cos(\alpha)$ d'où :

$\cos(x) = a$ équivaut à: $\cos(x) = \cos(\alpha)$

équivaut à : $x = \alpha + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$ **ou** $x = -\alpha + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

$S_{\mathbb{R}} = \{\alpha + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\alpha + 2k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}\}$

- **Equation de la forme $\sin(x) = a$ et $a \in [-1;1]$**

On cherche α de $\mathbb{R}$ tel que $a = \sin(\alpha)$ d'où :

$\sin(x) = a$ équivaut à: $\sin(x) = \sin(\alpha)$

équivaut à : $x = \alpha + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$ **ou** $x = \pi - \alpha + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

$S_{\mathbb{R}} = \{\alpha + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi - \alpha + 2k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}\}$

- **Equation de la forme $\tan(x) = a$ et $a \in \mathbb{R}$**

On cherche α de $\mathbb{R}$ tel que $a = \tan(\alpha)$ d'où :

$\tan(x) = a$ équivaut à: $\tan(x) = \tan(\alpha)$

équivaut à : $x = \alpha + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$ donc $S_{\mathbb{R}} = \{\alpha + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$

II) Formules de transformation :

Formules praincipales :

1) $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

2) $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

3) $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

4) $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$

5) $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \times \tan b}$

6) $\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \times \tan b}$

Formules de dublication

7) $\sin(2a) = 2\cos a \sin a$

8) $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$

9) $\tan(2a) = \dfrac{2\tan a}{1 + \tan^2 a}$

Formules de linéarisation

10) $\cos^2 a = \dfrac{1+\cos(2a)}{2}$ et $\sin^2 a = \dfrac{1-\cos(2a)}{2}$

Changement de variable $t = \tan(\frac{a}{2})$

On pose $t = \tan(\frac{a}{2})$ on trouve que :

11) $\tan(a) = \dfrac{2t}{1+t^2}$; $\sin(a) = \dfrac{2t}{1+t^2}$; $\cos(a) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

Transformations des produits à des sommes

12) $\cos a \cos b = -\dfrac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$

13) $\sin a \,\text{sins}\, b = -\dfrac{1}{2}[\cos(a+b) - \cos(a-b)]$

14) $\sin a \cos b = \dfrac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$

Transformations des sommes à des produits

15) $\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$

16) $\cos(p) - \cos(q) = -2\sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$

17) $\sin(p) + \sin(q) = 2\sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$

18) $\sin(p) - \sin(q) = -2\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$

Transformation de $a\cos x + b\sin x$

19) $a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x + \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x\right)$

$= \sqrt{a^2+b^2}(\cos\alpha\cos x + \sin\alpha\sin x)$

$= \sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\alpha))$

20) $a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x + \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x\right)$

$= \sqrt{a^2+b^2}(\sin\alpha\cos x + \cos\alpha\sin x)$

$= \sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\beta))$

Prof oulahri	Chapitre 6 : Calcul trigonométrique **06-01-2025**

Exercice 1:

1) Déterminer $sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)$; $cos\left(-\frac{13\pi}{6}\right)$; $cos\left(\frac{55\pi}{3}\right)$ **et** $sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right)$

2) Soit $x \in \left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$ **tel que** $sin(x) = \frac{4}{5}$ **; caluler** $sin(x)$ **et** $tan(x)$

Exercice 2:

1) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $[-\pi;\pi]$ l'équation $cos(x) = \frac{1}{2}$

b) Résoudre dans $[-\pi;\pi]$ l'inéquation $cos(x) \leq \frac{1}{2}$

2) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $[-\pi;\pi]$ l'équation $sin(x) = \frac{1}{2}$

b) Résoudre dans l'inéquation $sin(x) \geq \frac{1}{2}$

Exercice 3:

Calculer en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$

$A = \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ et $B = \sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ et $B = \sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$

Exercice 4:

1. montrer que : $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$

2. calculer $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$

3. **Calculer** $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$; $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$; $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ **et** $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

4. **Calculer avec deux méthodes différentes** $\tan\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ **et** $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$

Exercice 5:

1. Ecrire sous la forme de de $\cos(x \pm \alpha)$

A = $\frac{1}{2}\ cos\ x + \frac{\sqrt{3}}{2}\ sin\ x$ B = $\frac{\sqrt{2}}{2}\ cos\ x - \frac{\sqrt{2}}{2}\ sin\ x$

2. Ecrire sous la forme de de $\sin(x \pm \alpha)$

C = $\frac{1}{2}\ cos\ x + \frac{\sqrt{3}}{2}\ sin\ x$ D = $\frac{\sqrt{2}}{2} cos\ x - \frac{\sqrt{2}}{2}\ sin\ x$

Exercice 6:

on pose $(\forall x \in \mathbb{R})$: $P(x) = sin(2x) + cos(2x) - 1 + sinx - cosx$

1) a) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R})$: $sin(2x) + cos(2x) - 1 = 2sinx.(cosx - sinx)$

b) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R})$: $cosx - sinx = \sqrt{2}cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

c) En déduire que $P(x) = \sqrt{2}(2\sin(x) - 1) \times \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

2) Résoudre dans $[0;2\pi]$ l'équation $P(x) = 0$