Exercice 1

On considère le nombre $z = -3 + 3i$

1) Déterminer le module et l'argument du nombre z

2) déterminer le nombre Z tel que $zZ = 6\sqrt{2}\left(\cos\frac{17\pi}{12} + i\sin\frac{17\pi}{12}\right)$

3) en déduire $\cos\frac{17\pi}{12}$ et $\sin\frac{17\pi}{12}$

12 12

Exercice 2

On considère les nombres $z_2 = 1+\sqrt{2}+i \quad ; \quad z_1 = 1-i$

1) écrire z_1 sous forme trigonométrique

2) a) montrer que $z_1 z_2 = \sqrt{2}\,\overline{z_2}$

b) en déduire que $\arg(z_1) + 2\arg(z_2) \equiv 0 \ [2\pi]$

3) déduire l'argument du nombre z_2

Exercice 3

On pose $z_1 = \left(\sqrt{3}+1\right) + i\left(\sqrt{3}-1\right)$ et $z_2 = \left(\sqrt{3}-1\right) + i\left(\sqrt{3}+1\right)$

1) montrer que $z_1^2 = 4\left(\sqrt{3}+i\right)$ et $z_2 = i\overline{z_1}$

2) a) écrire $4\left(\sqrt{3}+i\right)$ sous forme trigonométrique

b) déduire la forme trigonométrique des nombres z_2 ; z_1

3) on considère dans (P) les deux points B , A d'affixes z_2 ; z_1

Calculer $\arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right)$ en déduire la nature du triangle OAB

Exercice 4

On considère les nombres $a = 1 - i\sqrt{3}$ ، $b = 2i$ et $c = 1 + i\left(2 - \sqrt{3}\right)$

1) déterminer la forme trigonométrique de a puis montrer que $\frac{b}{a} = \left[1, \frac{5\pi}{6}\right]$

2) montrer que $OACB$ est un losange puis déduire une mesure de $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC})$

3) prouver que $\arg(c) \equiv \frac{\pi}{12}\ [2\pi]$ et déterminer $\tan\frac{\pi}{12}$

1 Le plan (P) est muni d'un r.o.d $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$; on considère les points $A(-2+3i)$ et $B(1-3i)$. Soit $M(z)$ un point du plan tel que $z \neq -2+3i$ et on pose $z' = \dfrac{z-1+3i}{z+2-3i}$

1) déterminer une mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}})$ en fonction de argument de z'

2) a) déterminer et construire les ensembles :

$$E_1 = \left\{ M(z) / \arg(z') = \frac{\pi}{2} \; [2\pi] \right\}$$

et $E_2 = \{ M(z) / \; |z'| = 2 \}$

b) déterminer l'affixe de F point d'intersection des deux ensembles E_2 et E_1

2

On pose $g(z)=\dfrac{1-z}{\overline{z}}$ pour tout z de $\mathbb{C}^*$

1) résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $g(z)=1-i$

2) a) montrer que :

$$(\forall z\in\mathbb{C}^*)\ \ g(z)=\overline{g(z)} \Leftrightarrow (z-\overline{z})(z+\overline{z}+1)=0$$

b) en déduire l'ensemble :

$$E=\{M(z)\in(\mathrm{P})/\ \ g(z)\in\mathbb{R}\}$$

3) on pose $z=re^{i\theta}$ où $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$

Montrer que $1-\cos\theta=2\cos^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$

puis déterminer $g(z)$ sous forme trigonométrique

3) montrer que $|u|+|v|\geq 2$

Exercice 2

Le plan (P) est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$.

on considère l'application r qui à tout point $M(z)$ fait associer le point $M_1(z_1)$ tel que $z_1=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}z+\frac{\sqrt{3}+i}{2}$ et l'application h qui associer $M(z)$ au point $M_2(z_2)$ tel que $z_2=-2z+3i$

1) déterminer la nature de r et h en déterminant leurs éléments caractéristiques

2) on considère les points $\Omega(i)$ et $A(a)$; a un nombre complexe différent de i .

On pose $D=F(C)$; $C=F(B)$; $B=F(A)$ avec $F=h\circ r$

a) Montrer que si $M'(z')$ est l'image de $M(z)$ par F alors $z'-i=2e^{i\frac{4\pi}{3}}(z-i)$

b) vérifier que Ω est l'unique point vérifiant $F(\Omega)=\Omega$

3) a) déterminer en fonction de a les nombres d , c , b affixes des points D , C , B

b) montrer que les points D ; A ; Ω sont alignés

c) montrer que Ω est barycentre des points $(D,1)$, $(C,2)$, $(B,4)$

d) déterminer l'ensemble des points $A(a)$ pour que D appartient à l'axe des réels

1) $\left(\overline{\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OM'}}\right) \equiv \arg\left(\frac{z'}{z}\right)[2\pi]$

2) $\left(\overline{\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{AB}}\right) \equiv \arg(b-a)[2\pi]$

3) $\left(\overline{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right) \equiv \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right)[2\pi]$

4) $\left(\overline{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}}\right) \equiv \arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right)[2\pi]$

5) $A(a)$, $B(b)$ et $C(c)$ sont alignés si et seulement si :

$\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \equiv 0[2\pi]$

6) $A(a)$, $B(b)$ et $C(c)$ et D(d)

$(AB) \parallel (CD)$ si et seulement si : $\arg\left(\frac{a-b}{c-d}\right) \equiv 0[2\pi]$

Ou $\arg\left(\frac{a-b}{c-d}\right) \equiv \pi[2\pi]$

7) $(AB) \perp (CD)$ ssi : $\arg\left(\frac{a-b}{c-d}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ ou $\arg\left(\frac{a-b}{c-d}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$

9) Les points A,B,C et D sont cocycliques si et seulement si

$\frac{c-a}{b-a} \times \frac{b-d}{c-d} \in \mathbb{R}^*$

H) LA FORME EXPONENTIELLE D'UN COMPLEXE NON NUL :

1) Soit θ un réel on pose : $cos\theta + i\,sin\theta = e^{i\theta}$

Soit $z = [r, \theta]$ un complexe non nul, on a :

$z = r(cos\theta + i\,sin\theta) = re^{i\theta}$ Cette écriture s'appelle la forme exponentielle

2) Soient $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$

a) $zz' = rr'e^{i(\theta+\theta')}$ b) $z^n = r^n e^{in\theta}$ c) $\frac{1}{z'} = \frac{1}{r'}e^{-i\theta'}$

d) $\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$ e) $\overline{z} = re^{-i\theta}$ f) $-z = re^{i(\pi+\theta)}$

g) Pour tout réel θ on a : $\left(re^{i\theta}\right)^n = (r)^n\, re^{in\theta}$

d'où : $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$ $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall\theta \in \mathbb{R}$

(Formule de Moivre

h) Formule d'Euler : Pour tout réel θ on a :

$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$

$(\forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2)$

$e^{i\alpha} + e^{i\beta} = e^{i\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)}\left(e^{i\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}\right)} + e^{-i\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}\right)}\right)$

I) LES EQUATION DU SECOND DEGRE DANS $\mathbb{C}$:

1) Les équations de second degré

Soit dans $\mathbb{C}$ l'équation $az^2 + bz + c = 0$ (E) où a, b et c sont des complexes avec $a \neq 0$ et soit $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant

on a :**Si $\Delta = 0$** alors l'équation (E) admet comme solution le complexe $z = -\frac{b}{2a}$

Si $\Delta \neq 0$ l'équation (E) admet comme solution les complexes $z_1 = \frac{-b+\delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}$ où δ une racine carrées de Δ

Remarque : Si les coefficients a, $b$et c sont des réels et $\Delta < 0$ alors l'équation $az^2 + bz + c =$ admet deux racines complexes conjugué $z_1 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

J) LES RACINES n-EME D'UN COMPLEXE NON NUL

1) Les racines n-ième de l'unité :

a)On appelle racine n-ième de l'unité tout complexe u qui vérifie : $u^n = 1$

b)L'unité admet n racines n-ème qui s'écrivent de la forme :

$u_k = e^{\frac{2k\pi}{n}i}$ Où $k \in \{0,1,2, \ldots, (n-1)\}$

2) Les racines n-ème d'un nombre complexe non nul.

Le nombre complexe non nul $a = re^{\theta i}$ admet n racines $n - éme$ $(n \in \mathbb{N}*)$ differentes qui sont :

$u_k = \sqrt[n]{r}e^{\frac{\theta+2k\pi}{n}i}$ où $k \in \{0,1,2, \ldots, (n-1)\}$

K) LES TRANSFORMATIONS DANS LE PLAN COMPLEXE.

1) La translation : Soit $\vec{u}$ un vecteur de $\mathcal{V}_2$ tel que :

$aff(\vec{u}\ ) = a$; la Translation $t_{\vec{u}}$ transforme $M(z)$ en $M'(z')$

si et seulement si : $z' = z + a$

Cette égalité s'appelle l'écriture complexe de la translation

$t_{\vec{u}}$ de vecteur $\vec{u}$ tel que $\boldsymbol{aff}(\vec{u}\ ) = \boldsymbol{a}$

2) L'homothétie : l'homothétie de centre $\Omega(\omega)$ et de Rapport k, admet une écriture complexe de la forme :

$z' = kz + \omega(1 - k)$

3) La rotation : La rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle θ, admet une écriture complexe de la forme :

$$z' = (z - \omega)e^{\theta i} + \omega$$

L) Etude de la transformation qui transforme $M(z)$ en $M'(z')$ tel que: $z' = az + b$; $b \in \mathbb{C}$

1er cas: $a = 0$

La transformation f est une constante, elle lie chaque point $M(z)$ au point fixe $B(b)$

2eme cas: $a = 1$

f est la transformation qui transforme $M(z)$ en $M'(z')$ tel que $z' = z + b$

Dans ce cas la transformation f est une translation de vecteur $\vec{u}$ tel que : $aff(\vec{u}\ ) = b$

3éme cas : $a \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$

$$f(M(z)) = M'(z') \Leftrightarrow z' = az + b$$

Exercice 6

1) montrer que $\left(\forall x \in \mathbb{R}^{+*}\right) \quad \ln x \leq x-1$

2) soit n de $\mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. $x_1 ; x_2 ; \ldots\ldots ; x_n$ و $\alpha_1 ; \alpha_2 ; \ldots\ldots ; \alpha_n$ des réels de $\mathbb{R}^{*+}$

Tels que $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1$ on pose $y = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$

a) Montrer que pour tout k de $\{1;2;\ldots\ldots;n\}$ on a : $\alpha_k \ln\left(\frac{x_k}{y}\right) \leq \frac{\alpha_k x_k}{y} - \alpha_k$

b) En déduire que : $\sum_{k=1}^{k=n} \alpha_k \ln\left(x_k\right) \leq \ln\left(\sum_{k=1}^{k=n} \alpha_k x_k\right)$

c) Montrer que : $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} \ln\left(x_k\right) \leq \ln\left(\frac{\sum_{k=1}^{k=n} x_k}{n}\right)$

d) Prouver que $\sqrt[x]{x_1 x_2 \ldots\ldots x_n} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} x_k$

e) Montrer que $n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$

En déduire que $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \ldots\ldots + \frac{x_n}{x_1} \geq n$ pour tous $x_1 ; x_2 ; \ldots\ldots ; x_n$ de $\mathbb{R}^{*+}$