Exercice 6

1) montrer que $\left(\forall x\in\mathbb{R}^{+*}\right)\quad \ln x\le x-1$

2) soit n de $\mathbb{N}$ tel que $n\ge 2$. $x_1;x_2;\dots\dots;x_n$ و $\alpha_1;\alpha_2;\dots\dots;\alpha_n$ des réels de $\mathbb{R}^{*+}$

Tels que $\sum_{k=1}^{n}\alpha_k=1$ on pose $y=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k x_k$

a) Montrer que pour tout k de $\{1;2;\dots;n\}$ on a : $\alpha_k\ln\left(\frac{x_k}{y}\right)\le\frac{\alpha_k x_k}{y}-\alpha_k$

b) En déduire que : $\sum_{k=1}^{k=n}\alpha_k\ln(x_k)\le\ln\left(\sum_{k=1}^{k=n}\alpha_k x_k\right)$

c) Montrer que : $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n}\ln(x_k)\le\ln\left(\frac{\sum_{k=1}^{k=n}x_k}{n}\right)$

d) Prouver que $\sqrt[n]{x_1x_2\dots x_n}\le\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n}x_k$

e) Montrer que $n!\le\left(\frac{n+1}{2}\right)^n$

En déduire que $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\dots\dots+\frac{x_n}{x_1}\ge n$ pour tous $x_1;x_2;\dots\dots;x_n$ de $\mathbb{R}^{*+}$

Exercice (1) 3 points

(I) Soit m un nombre complexe non nul .

on considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (I) $(Z+1)^2 + m^2 = 0$

1) résoudre l'équation (I)

2) déterminer m pour que $e^{i\frac{\pi}{3}}$ soit solution de (I)

3) déterminer l'ensemble des points $M(m)$ pour que les solutions de (I) aient même module

(II) Le plan complexe est munie d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$

On considère les points $M(m)$; $B(b=-1+im)$ et $C(c=-1-im)$

1) déterminer l'ensemble des points $M(m)$ pour que M ; B ; C soient alignés

2) on suppose $|m|^2 + \mathrm{Re}(m) \neq 0$

Soit R la transformation du plan qui associer $M_1(Z_1)$ au point $M'(Z')$ tel que $Z' = iZ_1 - 1$

a) Montrer que R est une rotation et déterminer le centre Ω et un argument de son angle

b) Montrer que $\left(\dfrac{c-m}{c-b} \in i\mathbb{R}\right) \Leftrightarrow \left(|m|^2 = \mathrm{Im}(m)\right)$

c) Déduire l'ensemble des points $M(m)$ pour que M , B , C et Ω soient cocycliques

Exercice (2)

(I) Soit m un nombre complexe . on considère dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(E)\ Z^2-(2m+5i)Z+2m^2+(1+i)m-2(5+i)=0$$

1) a) vérifier que $\Delta=(2im+4+i)^2$

b) résoudre l'équation (E)

2) déterminer m pour que les solutions de (E) soient confondues et donner cette solution w

(II) le plan (P) est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$. on considère les points $M(m)$; $M'(Z'=(1+i)m+2+3i)$ et $M''(Z''=(1-i)m-2+2i)$

1) a) montrer que : $(\ M\ ,\ M'\ et\ M''\ alignés\ )\Leftrightarrow(\ \mathrm{Im}(m)=2\ )$

b) déduire l'ensemble des points $M'(Z')$ pour que $M\ ,\ M'\ ,\ M''$ soient alignés

2) soit S l'application du plan qui associer M au point M' et S' qui transforme M au point M''

a) montrer que S est le composé d'une homothétie et une rotation en donnant leurs éléments caractéristiques

b) montrer que $S'\circ S$ est une homothétie dont on déterminera le centre et le rapport

3) soit f l'application qui lie M' au point M''

a) montrer que f est une rotation en donnant l'affixe de son centre Ω et une mesure de son angle

b) soit I le milieu du $[M'M'']$ et T l'application qui transforme M en I .

monter que T est une translation et déterminer son vecteur

c) on suppose que $M'\neq\Omega$. montrer que (ΩI) et $(M'M'')$ sont perpendiculaire

3 Soit a un réel de $\mathbb{R}^{+*}$.

on considère la suite $U_n = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{a+k}$ et la fonction $f(x) = \ln(x+a)$

1) montrer que $(\forall k \in \{0,1,....,n-1\})$ $\frac{1}{a+k+1} \leq f(k+1) - f(k) \leq \frac{1}{a+k}$

2) prouver que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $\ln\left(1+\frac{n}{a}\right) \leq U_n \leq \frac{1}{a} + \ln\left(1+\frac{n}{a}\right)$

3) déterminer les limites $\lim_{n\to+\infty} U_n$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{U_n}{n}$

2 On considère la fonction f définie sur $\left]0,+\infty\right[$ par : $f(x) = \ln x - 2\arctan x$

1) calculer les limites $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$

2) calculer la dérivée $f'(x)$ et étudier le sens de variation de f puis dresser le tableau des variations

3) a) prouver que l'équation $f(x) = 2n$ admet une unique solution notée a_n

b) vérifier que $(\forall n \in \mathbb{N})$ $\quad e^{2n} < a_n$ et déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$

4) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$ $\quad \ln\left(\dfrac{a_n}{e^{2n}}\right) = 2\arctan(a_n)$ en déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{e^{2n}} = e^{\pi}$

5) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$ $\quad \ln\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right) = 2\left(\arctan(a_n) - \arctan(a_{n+1}) - 1\right)$ en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{a_{n+1}}$

Exercice n°3:

I) Soit f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} x+(1-x)\ln(1-x) & si\ x \neq 1 \\ 1 & si\ x = 1 \end{cases}$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Déterminer le domaine D de f.

2) a) Etudier la continuité de f sur D.

b) Etudier la dérivabilité de f à gauche en 1.Interpréter graphiquement ce résultat.

3) Etudier les variations de f.

4) Tracer la courbe représentative (C) de f dans un repère orthonormé.

II) On pose, pour tout $x \in [0,1[$, $g(x)=f'(x)$.

1) Etudier les variations de g.

2) Soit $n \in IN^*$, et k un entier tel que $0 \leq k \leq n-2$.

a) Montrer que pour tout $x \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$ on a : $g\left(\frac{k}{n}\right) \leq g(x) \leq g\left(\frac{k+1}{n}\right)$.

b) En déduire que : $\frac{1}{n} g\left(\frac{k}{n}\right) \leq f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \frac{1}{n} g\left(\frac{k+1}{n}\right)$.

3) On pose: $U_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right)$.

a) Montrer que $\frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{n}\right) + 1 - \frac{1}{n} \leq U_n \leq 1 - \frac{1}{n}$.

b) En déduire que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite .

4) Montrer que $U_n = \ln\left(\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}\right)$. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$.

EXERCICE1 :(3.5 points)

Soit α un nombre complexe non nul.

I- On considère dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z :

(E_α) : $z^2 - i\alpha\sqrt{3}z - \alpha^2 = 0$

0.25 1-a- Vérifier que le discriminant de (E_α) est $\Delta = \alpha^2$

0.5 b- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_α)

0.5 2- Sachant que $\alpha = |\alpha|e^{i\lambda}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$), mettre les deux racines de l'équation (E_α) sous la forme exponentielle.

II- On suppose que le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

On considère les points Ω , M_1 et M_2 d'affixes respectivement α , $z_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\alpha$ et $z_2 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\alpha$ et soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$

0.5 1-a-Montrer que $R(\Omega) = M_1$ et que $R(M_1) = M_2$

0.25 b- En déduire que les deux triangles $O\Omega M_1$ et OM_1M_2 sont équilatéraux.

0.25 2-a- Vérifier que : $z_1 - z_2 = \alpha$

0.5 b- Montrer que Les deux droites (ΩM_2) et (OM_1) sont orthogonales.

0.25 c- En déduire que $O\Omega M_1M_2$ est un losange .

0.5 3- Montrer que pour tout réel θ , le nombre : $Z = \frac{z_2 - \alpha}{z_1 - \alpha} \div \frac{z_2 - |\alpha| e^{i\theta}}{z_1 - |\alpha| e^{i\theta}}$ est un réel.