PARTIE 1 :

On considère la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x) = -x + 1 + x\ln x$.

01. ..

a. Calculer g' la fonction dérivée de g , puis donner le tableau de variations de g .

b. On déduire que : $\forall x > 0\ ;\ g(x) \geq 0$ puis que la seule solution de l'équation $g(x) = 0$ est 1.

02. On considère la fonction h définie sur $]0,+\infty[$ par : $h(x) = 1 + 2x\ln x$.

a. Calculer h' la fonction dérivée de h , puis donner le tableau de variations de h .

b. On déduire que : $\forall x > 0\ ;\ h(x) > 0$.

PARTIE 2 :

On considère la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = x(-1+\ln x) + 2\sqrt{x}\ ;\ x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$.

01. ..

a. Montrer que f est continue à droite de $x_0 = 0$.

b. Montrer que : $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$. (on peut poser $t = \sqrt{x}$) .donner une interprétation géométrique du résultat obtenu .

c. Montrer que : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

d. Montrer que : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$ .donner une interprétation géométrique du résultat obtenu .

02. ..

a. Calculer f ' la fonction dérivée de f sur $]0,+\infty[$ puis vérifie que $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}h(\sqrt{x})$.

b. On déduit que la fonction f est croissante sur $[0,+\infty[$; donner le tableau de variations de f.

c. Donner l'équation de la tangente (Δ) à la courbe (C_f) de f au point d'abscisse $x_1=1$.

d. Construire la courbe (C_f) de f et la tangente (Δ) dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ unité de mesure 1 cm.

..

a. Montrer que : $f(x)-x=2\sqrt{x}g(\sqrt{x})$.

b. On déduit que : la courbe (C_f) de f est au-dessus de la droite (Δ) .

04. ..

a. Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur l'intervalle J ; on détermine J .

b. Vérifier que : $f(1)=1$ puis montrer que la fonction f^{-1} est dérivable en 1 puis calculer $(f^{-1})'(1)$

c. Construire la courbe $(C_{f^{-1}})$ de la fonction réciproque f^{-1} dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

05. ..

a. Vérifie que : $\left(\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\right)'=\sqrt{x}$ pour $x>0$.

b. On utilise une intégration par parties , montrer que $\int_1^e x\ln x\,dx=\frac{e^2+1}{4}$.

c. Calculer en cm^2 l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C_f) et l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$.

PARTIE 3 :

06. On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0=\frac{1}{2} \\ u_{n+1}=f(u_n)\ ;\ \forall n\in\mathbb{N} \end{cases}$.

a. Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}\ ;\ 0\le u_n\le 1$.

b. Montrer que la suite (u_n) est croissante .

c. On déduit que (u_n) est une suite convergente .

d. Déterminer la limite de la suite (u_n).

02

01. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 4z + 29 = 0$.

: .

02.

04. Le plan complexe (P) étant rapporté au repére orthonormé $(0, \vec{u}, \vec{v})$; on considère les points A et B d'affixes respectivement $a = 5 + 2i$ et $b = -2 + 5i$. on considère la rotation R de centre le point Ω d'affixe $\omega = -2 + 2i$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

a. Etablir que l'écriture complexe de la rotation R est $z' = iz + 4i$.

b. Verifier que $c=-2+9i$ et $d=1+2i$ les affixes des points C et D tel que : $R(A)=C$ et $R(D)=B$.

c. Montrer que : $(AD)\perp(BC)$ et $AD=BC$.

05. Soit M est un point du plan complexe (P) d'affixe $z=x+yi$ avec $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$. on considère le cercle (C) de centre A d'affixe $a=5+2i$ et de rayon 2 .

a. Montrer que : $M_{(z)}\in(C)\Leftrightarrow x^2+y^2-10x-4y+25=0$.

b. Soit le point M' est le point du plan complexe (P) d'affixe $z'=x'+y'i$ avec $x'\in\mathbb{R}$ et $y'\in\mathbb{R}$ l'image de M par la rotation R . On utilise deux méthodes différentes montrer qu'on a : $|z'-c|=2$.

06. Soit le point F est l' image du point B par l'homothétie h de centre A et de rapport $k=2$.

a. Montrer que : l'affixe du point F est $f=-9+8i$.

b. Sans faire des calculs donner (Γ') l'image du cercle (Γ) de centre B et de rayon $r_\Gamma=4$.

03