Exercice 1

On considère le nombre $z = -3 + 3i$

1) Déterminer le module et l'argument du nombre z

2) déterminer le nombre Z tel que $zZ = 6\sqrt{2}\left(\cos\frac{17\pi}{12} + i\sin\frac{17\pi}{12}\right)$

3) en déduire $\cos\frac{17\pi}{12}$ et $\sin\frac{17\pi}{12}$

12 12

Exercice 2

On considère les nombres $z_2 = 1+\sqrt{2}+i$; $z_1 = 1-i$

1) écrire z_1 sous forme trigonométrique

2) a) montrer que $z_1 z_2 = \sqrt{2}\,\overline{z_2}$

b) en déduire que $\arg(z_1)+2\arg(z_2) \equiv 0 \ [2\pi]$

3) déduire l'argument du nombre z_2

Exercice 3

On pose $z_1 = (\sqrt{3}+1) + i(\sqrt{3}-1)$ et $z_2 = (\sqrt{3}-1) + i(\sqrt{3}+1)$

1) montrer que $z_1^2 = 4(\sqrt{3}+i)$ et $z_2 = i\overline{z_1}$

2) a) écrire $4(\sqrt{3}+i)$ sous forme trigonométrique

b) déduire la forme trigonométrique des nombres z_2 ; z_1

3) on considère dans (P) les deux points B , A d'affixes z_2 ; z_1

Calculer $\arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right)$ en déduire la nature du triangle OAB

Exercice 4

On considère les nombres $a = 1 - i\sqrt{3}$, $b = 2i$ et $c = 1 + i\left(2 - \sqrt{3}\right)$

1) déterminer la forme trigonométrique de a puis montrer que $\dfrac{b}{a} = \left[1, \dfrac{5\pi}{6}\right]$

2) montrer que $OACB$ est un losange puis déduire une mesure de $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC})$

3) prouver que $\arg(c) \equiv \dfrac{\pi}{12}\ [2\pi]$ et déterminer $\tan\dfrac{\pi}{12}$

1 Le plan (P) est muni d'un r.o.d $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$; on considère les points $A(-2+3i)$ et $B(1-3i)$. Soit $M(z)$ un point du plan tel que $z \neq -2+3i$ et on pose $z' = \dfrac{z-1+3i}{z+2-3i}$

1) déterminer une mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}})$ en fonction de argument de z'

2) a) déterminer et construire les ensembles :

$$E_1 = \left\{ M(z) / \arg(z') = \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \right\}$$

et $E_2 = \{ M(z) / \ |z'| = 2 \}$

b) déterminer l'affixe de F point d'intersection des deux ensembles E_2 et E_1

2

On pose $g(z)=\dfrac{1-z}{\overline{z}}$ pour tout z de $\mathbb{C}^*$

1) résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $g(z)=1-i$

2) a) montrer que :

$$(\forall z\in\mathbb{C}^*)\quad g(z)=\overline{g(z)}\ \Leftrightarrow (z-\overline{z})(z+\overline{z}+1)=0$$

b) en déduire l'ensemble :

$$E=\{M(z)\in(\mathrm{P})/\ \ g(z)\in\mathbb{R}\}$$

3) on pose $z=re^{i\theta}$ où $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$

Montrer que $1-\cos\theta=2\cos^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$

puis déterminer $g(z)$ sous forme trigonométrique

5) montrer que $|u|+|v| \geq 2$

Exercice 2

Le plan (P) est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$.

on considère l'application r qui à tout point $M(z)$ fait associer le point $M_1(z_1)$ tel que $z_1=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}z+\frac{\sqrt{3}+i}{2}$ et l'application h qui associer $M(z)$ au point $M_2(z_2)$ tel que $z_2=-2z+3i$

1) déterminer la nature de r et h en déterminant leurs éléments caractéristiques

2) on considère les points $\Omega(i)$ et $A(a)$; a un nombre complexe différent de i .

On pose $D=F(C)$; $C=F(B)$; $B=F(A)$ avec $F=h\circ r$

a) Montrer que si $M'(z')$ est l'image de $M(z)$ par F alors $z'-i=2e^{i\frac{4\pi}{3}}(z-i)$

b) vérifier que Ω est l'unique point vérifiant $F(\Omega)=\Omega$

3) a) déterminer en fonction de a les nombres d , c , b affixes des points D , C , B

b) montrer que les points D ; A ; Ω sont alignés

c) montrer que Ω est barycentre des points $(D,1)$, $(C,2)$, $(B,4)$

d) déterminer l'ensemble des points $A(a)$ pour que D appartient à l'axe des réels

1) $\left(\overline{\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OM'}}\right) \equiv \arg\left(\frac{z'}{z}\right)[2\pi]$

2) $\left(\overline{\vec{e_1};\overrightarrow{AB}}\right) \equiv \arg(b-a)[2\pi]$

3) $\left(\overline{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right) \equiv \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right)[2\pi]$

4) $\left(\overline{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}}\right) \equiv \arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right)[2\pi]$

5) $A(a)$, $B(b)$ et $C(c)$ sont alignés si et seulement si :

$\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \equiv 0[2\pi]$

6) $A(a)$, $B(b)$ et $C(c)$ et D(d)

$(AB) \parallel (CD)$ si et seulement si : $\arg\left(\frac{a-b}{c-d}\right) \equiv 0[2\pi]$

Ou $\arg\left(\frac{a-b}{c-d}\right) \equiv \pi[2\pi]$

7)$(AB) \perp (CD)$ ssi : $\arg\left(\frac{a-b}{c-d}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ ou $\arg\left(\frac{a-b}{c-d}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$

9) Les points A,B,C et D sont cocycliques si et seulement si

$\frac{c-a}{b-a} \times \frac{b-d}{c-d} \in \mathbb{R}^*$

H) LA FORME EXPONENTIELLE D'UN COMPLEXE NON NUL :

1)Soit θ un réel on pose : $cos\theta + i\, sin\theta = e^{i\theta}$

Soit $z = [r, \theta]$ un complexe non nul, on a :

$z = r(cos\theta + i\, sin\theta) = re^{i\theta}$ Cette écriture s'appelle la forme exponentielle

2) Soient $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$

a) $zz' = rr'e^{i(\theta+\theta')}$ b) $z^n = r^n e^{in\theta}$ c) $\frac{1}{z'} = \frac{1}{r'}e^{-i\theta'}$

d) $\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$ e) $\overline{z} = re^{-i\theta}$ f) $-z = re^{i(\pi+\theta)}$

g) Pour tout réel θ on a : $\left(re^{i\theta}\right)^n = (r)^n\, re^{in\theta}$

d'où : $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta) \quad \forall n \in \mathbb{N}\ \forall \theta \in \mathbb{R}$

(Formule de Moivre

h) Formule d'Euler : Pour tout réel θ on a :

$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

$(\forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2)$

$e^{i\alpha} + e^{i\beta} = e^{i\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)}\left(e^{i\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}\right)} + e^{-i\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}\right)}\right)$

I) LES EQUATION DU SECOND DEGRE DANS $\mathbb{C}$:

1) Les équations de second degré

Soit dans $\mathbb{C}$ l'équation $az^2 + bz + c = 0$ (E) où a, b et c sont des complexes avec $a \neq 0$ et soit $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant

on a :**Si $\Delta = 0$** alors l'équation (E) admet comme solution le complexe $z = -\frac{b}{2a}$

Si $\Delta \neq 0$ l'équation (E) admet comme solution les complexes $z_1 = \frac{-b+\delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}$ où δ une racine carrées de Δ

Remarque : Si les coefficients a, $b$et c sont des réels et $\Delta < 0$ alors l'équation $az^2 + bz + c =$ admet deux racines complexes conjugué $z_1 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

J) LES RACINES n-EME D'UN COMPLEXE NON NUL

1) Les racines n-ième de l'unité :

a)On appelle racine n-ième de l'unité tout complexe u qui vérifie : $u^n = 1$

b)L'unité admet n racines n-ème qui s'écrivent de la forme :

$u_k = e^{\frac{2k\pi}{n}i}$ Où $k \in \{0,1,2, \dots, (n-1)\}$

2) Les racines n-ème d'un nombre complexe non nul.

Le nombre complexe non nul $a = re^{\theta i}$ admet n racines $n - éme$ $(n \in \mathbb{N}*)$ differentes qui sont :

$u_k = \sqrt[n]{r}e^{\frac{\theta+2k\pi}{n}i}$ où $k \in \{0,1,2, \dots, (n-1)\}$

K) LES TRANSFORMATIONS DANS LE PLAN COMPLEXE.

1) La translation : Soit $\vec{u}$ un vecteur de $\mathcal{V}_2$ tel que :

$aff(\vec{u}\ ) = a$; la Translation $t_{\vec{u}}$ transforme $M(z)$ en $M'(z')$

si et seulement si :$z' = z + a$

Cette égalité s'appelle l'écriture complexe de la translation

$t_{\vec{u}}$ de vecteur $\vec{u}$ tel que $\boldsymbol{aff(\vec{u}\ ) = a}$

2) L'homothétie : l'homothétie de centre $\Omega(\omega)$ et de Rapport k, admet une écriture complexe de la forme :

$z' = kz + \omega(1 - k)$

3) La rotation : La rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle θ, admet une écriture complexe de la forme :

$$z' = (z - \omega)e^{\theta i} + \omega$$

L) Etude de la transformation qui transforme $\boldsymbol{M(z)}$ en $\boldsymbol{M'(z')}$ tel que: $\boldsymbol{z' = az + b}$; $b \in \mathbb{C}$

1er cas: $\boldsymbol{a = 0}$

La transformation f est une constante, elle lie chaque point $M(z)$ au point fixe $B(b)$

2eme cas: $\boldsymbol{a = 1}$

f est la transformation qui transforme $M(z)$ en $M'(z')$ tel que $z' = z + b$

Dans ce cas la transformation f est une translation de vecteur $\vec{u}$ tel que : $aff(\vec{u}\ ) = b$

3éme cas : $\boldsymbol{a \in \mathbb{R} - \{0, 1\}}$

$f(M(z)) = M'(z') \Leftrightarrow z' = az + b$

Exercice 6

1) montrer que $\left(\forall x \in \mathbb{R}^{+*}\right) \quad \ln x \leq x-1$

2) soit n de $\mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. $x_1 ; x_2 ; \ldots\ldots ; x_n$ و $\alpha_1 ; \alpha_2 ; \ldots\ldots ; \alpha_n$ des réels de $\mathbb{R}^{*+}$

Tels que $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1$ on pose $y = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$

a) Montrer que pour tout k de $\{1;2;\ldots\ldots;n\}$ on a : $\alpha_k \ln\left(\frac{x_k}{y}\right) \leq \frac{\alpha_k x_k}{y} - \alpha_k$

b) En déduire que : $\sum_{k=1}^{k=n} \alpha_k \ln(x_k) \leq \ln\left(\sum_{k=1}^{k=n} \alpha_k x_k\right)$

c) Montrer que : $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} \ln(x_k) \leq \ln\left(\frac{\sum_{k=1}^{k=n} x_k}{n}\right)$

d) Prouver que $\sqrt[x]{x_1 x_2 \ldots\ldots x_n} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} x_k$

e) Montrer que $n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$

En déduire que $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \ldots\ldots + \frac{x_n}{x_1} \geq n$ pour tous $x_1 ; x_2 ; \ldots\ldots ; x_n$ de $\mathbb{R}^{*+}$

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
المسالك الدولية
الدورة العادية 2023

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتعليم الأولي والرياضة
المركز الوطني للتقويم والامتحانات

SSSSSSSSSSSSSSSSSSSS-SSS | الموضوع | NS 24F

المادة	الرياضيات	مدة الإنجاز	4h
الشعبة أو المسلك	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (خيار فرنسية)	المعامل	9

EXERCICE3 :(3.5 points)

On considère le nombre complexe : $u=1+\left(2-\sqrt{3}\right)i$

0.5 1- a) Écrire sous forme exponentielle les nombres complexes : $1-i$ et $1+\sqrt{3}i$

0.25 b) Montrer que : $\dfrac{(1-i)\left(1+\sqrt{3}i\right)}{2\sqrt{2}}=e^{i\frac{\pi}{12}}$

0.25 c) En déduire que : $\tan\left(\dfrac{\pi}{12}\right)=2-\sqrt{3}$

0.5 d) Montrer que : $u=(\sqrt{6}-\sqrt{2})e^{i\frac{\pi}{12}}$

2- On considère les deux suites numériques $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$x_0=1 \ , \ \ y_0=0 \ \text{ et } \ (\forall n\in\mathbb{N}) \ ; \ \begin{cases} x_{n+1}=x_n-\left(2-\sqrt{3}\right)y_n \\ y_{n+1}=\left(2-\sqrt{3}\right)x_n+y_n \end{cases}$$

0.5 a) Montrer par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $x_n+iy_n=u^n$

0.5 b) En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $x_n=\dfrac{\cos\left(\dfrac{n\pi}{12}\right)}{\left(\cos\dfrac{\pi}{12}\right)^n}$ et $y_n=\dfrac{\sin\left(\dfrac{n\pi}{12}\right)}{\left(\cos\dfrac{\pi}{12}\right)^n}$

3- Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$

Pour tout entier naturel n, on note A_n le point d'affixe u^n

0.5 a) Déterminer les entiers n pour lesquels les points O, A_0 et A_n sont alignés.

0.5 b) Montrer que pour tout entier n , le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_n

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتعليم الأولي والرياضة
المركز الوطني للتقويم والامتحانات

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
المسالك الدولية
الدورة الاستدراكية 2023

SSSSSSSSSSSSSSSSSSSS-SSS | الموضوع | RS 24F

4h	مدة الإنجاز	الرياضيات	المادة
9	المعامل	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (خيار فرنسية)	الشعبة أو المسلك

EXERCICE2 :(3.5 points)

Les parties I et II peuvent être traitées indépendamment.

PARTIE I :

On considère dans $\mathbb{R}_+^2$ le système suivant : $(S):\begin{cases}\sqrt{x}\left(1+\dfrac{1}{x+y}\right)=\dfrac{12}{5}\\ \sqrt{y}\left(1-\dfrac{1}{x+y}\right)=\dfrac{4}{5}\end{cases}$

1- Soit $(x,y)\in\mathbb{R}_+^2$ une solution du système (S). On pose : $z=\sqrt{x}+i\sqrt{y}$

0.25 a) Montrer que : $z+\dfrac{1}{z}=\dfrac{12}{5}+\dfrac{4}{5}i$

0.75 b) Montrer que : $z^2-\left(\dfrac{12}{5}+\dfrac{4}{5}i\right)z+1=0$, en déduire les valeurs possibles de z

(On remarque que : $\dfrac{28}{25}+\dfrac{96}{25}i=\left(\dfrac{2}{5}(4+3i)\right)^2$)

0.25 c) En déduire les valeurs du couple (x,y)

0.5 2- Résoudre dans $\mathbb{R}_+^2$ le système (S)

PARTIE II :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$

Soit (U) le cercle de centre O et de rayon 1 et $A(a)$, $B(b)$ et $C(c)$ trois points du cercle (U) deux à deux distincts.

0.25 1- Montrer que : $(\forall z \in \mathbb{C})$; $|z|=1 \Leftrightarrow \bar{z}=\frac{1}{z}$

0.5 2-a) La droite passant par A et parallèle à (BC) coupe le cercle (U) au point $P(p)$

Montrer que : $p=\frac{bc}{a}$

0.5 b) La droite passant par A et perpendiculaire à (BC) coupe le cercle (U) au point $Q(q)$. Montrer que : $q=-p$

0.5 c) La droite passant par C et parallèle à (AB) coupe le cercle (U) au point $R(r)$

Montrer que les deux droites (PR) et (OB) sont perpendiculaires.

Baccalauréat Sciences mathématique

Session Normale juin 2008

MATHÉMATIQUES

Soit a un nombre complexe non nul et $\overline{a}$ le conjugué du nombre a.

Partie I:

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation : $(G) : iz^2 + (a + \overline{a} - i)z - \overline{a} - ia\overline{a} = 0$

0.50 pt **1 - a)** Vérifier que le discriminant de l'équation (G) est : $\Delta = (a - \overline{a} - i)^2$

0.50 pt **b)** Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation (G).

0.50 pt **2 -** Montrer que a est une solution de l'équation (G) si, et seulement si : $\Re e(a) = \Im m(a)$
(où $\Re e(a)$ est la partie réel du complexe a et $\Im m(a)$ est la partie imaginaire du complexe a)

Partie II:

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$et on suppose que $\Re e(a) \neq \Im m(a)$.
On considère les points A et B et C d'affixes respectives : a et $i\overline{a}$ et $1 + ia$.

1 - On pose : $Z = \frac{(1+ia)-a}{i\overline{a}-a}$

0.50 pt **a)** Vérifier que : $\overline{Z} = \frac{(i-1)\overline{a}-i}{i\overline{a}-a}$

0.50 pt **b)** Montrer que les points A et B et C sont alignés si, et seulement si : $\Im m(a) = \frac{1}{2}$

2 - On suppose dans cette question que $\Im m(a) \neq \frac{1}{2}$
On considère R_1 la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et R_2 la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$. On pose : $R_1(B) = B'$ et $R_2(C) = C'$.
Soit E le milieu du segment $[BC]$.

0.50 pt **a)** Déterminer b' et c' les affixes respectives de B' et C'.

0.50 pt **b)** Montrer que les droites (AE) et $(B'C')$ sont perpendiculaires et que : $B'C' = 2AE$

Baccalauréat Sciences mathématique

Session de Rattrapage juillet 2008

MATHÉMATIQUES

Série : **Baccalauréat Sciences Mathématiques A & B**

Exercice 1 : (3,50 pts)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
On considère l'application r qui associe un point $M(z)$ à un point $M_1(z_1)$ tel que :

$$z_1 = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}z + \frac{\sqrt{3}+i}{2}$$

Et l'application h qui associe un point $M(z)$ à un point $M_2(z_2)$ tel que : $z_2 = -2z + 3i$
On pose : $F = h \circ r$

1.00 pt **1 -** Déterminer la nature de chacune des deux applications r et h et leurs éléments caractéristiques.

2 - On considère les deux points $\Omega(i)$ et $A(a)$ avec a un nombre complexe donné différent de i.
On pose : $B = F(A)$ et $C = F(B)$ et $D = F(C)$

0.50 pt **a)** Montrer que si le point $M'(z')$ est l'image du point $M(z)$ par l'application F alors :

$$z' - i = 2e^{i\frac{4\pi}{3}}(z - i)$$

0.25 pt **b)** Vérifier que Ω est l'unique point qui vérifie : $F(\Omega) = \Omega$

0.75 pt **3 - a)** Déterminer en fonction du nombre complexe a les complexes b et c et d les affixes respectives de B et C et D.

0.50 pt **b)** Montrer que les points Ω et A et D sont alignés.

0.50 pt **c)** Montrer que Ω est le barycentre du système pondéré $\{(B,4);(C,2);(D,1)\}$.

0.25 pt **d)** Déterminer l'ensemble des points $A(a)$ pour que le point D appartient à l'axe des réels.

Baccalauréat Sciences mathématique

Session Normale juin 2009

MATHÉMATIQUES

Série : **Baccalauréat Sciences Mathématiques A & B**

Exercice 2 : (4 pts)

Soit m un nombre complexe différent de 1.

I) On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z :

$$(E)\ :\ z^2-(1-i)(m+1)z-i(m^2+1)=0$$

0,25 pt — **1 - a)** Vérifier que le discriminant de l'équation (E) est : $\Delta=[(1+i)(m-1)]^2$

0,25 pt — **b)** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

0,50 pt — **c)** Déterminer sous forme algébrique les deux valeurs du complexe m afin que le produit des deux solutions de l'équation (E) est égal à 1.

2 - On pose $z_1=1-im$ et $z_2=m-i$

1,00 pt — Écrire z_1 et z_2 sous forme trigonométrique dans le cas où $m=e^{i\theta}$ avec $\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$

II) Le plan complexe $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{e_1};\vec{e_2})$

On considère les points M , M_1 et M_2 d'affixes respectivement m ; $z_1=1-im$ et $z_2=m-i$

0,50 pt — **1 -** Déterminer l'ensemble des points M pour lesquels les points M , M_1 et M_2 soient alignés.

0,50 pt — **a)** Montrer que la transformation R reliant chaque point M d'affixe z au point M' d'affixe $z'=1-iz$ est une rotation dont on déterminera l'affixe de son centre Ω et une mesure de son angle.

0,50 pt — **b)** Montrer que le nombre complexe $\dfrac{z_2-z_1}{z_2-m}$ est un imaginaire pure si et seulement si $\Re e(m)+\Im m(z)=1$.

0,50 pt — **c)** En déduire l'ensemble des points M tel que les points Ω , M , M_1 et M_2 soient cocycliques.