## Exercice 1 : (4.5 pts )

Soit la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 &= 8 \\ u_{n+1} &= \frac{1}{4}u_n + 3 \ ; \ (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

**0,5 pt** **1 -** Calculer $u_1$ et $u_2$

**0.5 pt** **2 -** Montrer par récurrence pour tout $n$ de $\mathbb{N}$ ; $u_n > 4$

**0,5 pt** **3 -** **a)** Montrer que : $u_{n+1} - u_n = -\frac{3}{4}(u_n - 4)$

**0,75 pt** **b)** Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante et qu'elle est convergente

**4 -** On pose : $v_n = u_n - 4$ pour tout $n$ de $\mathbb{N}$

**0,25 pt** **a)** Calculer $v_0$

**0,5 pt** **b)** Montrer que $(v_n)$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{4}$

**1 pt** **c)** Calculer $v_n$ en fonction de $n$ puis déduire que : $u_n = 4\left(\frac{1}{4}\right)^n + 4$ pour tout $n$ de $\mathbb{N}$

**0.5pt** **d)** Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

## Exercice 2 : ( 11 pts )

**Partie A**

On considère la fonction numérique $g$ définie sur $]0;+\infty[$. par : $g(x) = x + 1 - \ln x$.

**0,5 pt** **1 -** Montrer que $g'(x) = \dfrac{x-1}{x}$ pour tout $x$ de $]0;+\infty[$.

**1 pt** **2 -** Étudier le signe de $g'(x)$ sur $]0;+\infty[$.

**0,75 pt** **3 -** Calculer $g(1)$ et dresser le tableau de variations de $g$ (Le calcul des limites n'est pas demandé).

**0,5 pt** **4 -** Déduire du tableau de variations que $g(x) \geq 0$ pour tout $x$ de $]0;+\infty[$.

**Partie B**

On considère la fonction numérique $f$ définie sur $]0;+\infty[$. par : $f(x) = x^2 - 1 - 2x\ln x$ et soit $(C)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

**0,75 pt** **1 -** Montrer que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = -1$

**0,5 pt** **2 -** **a)** Vérifier que pour tout x de $]0,+\infty[$: $f(x) = x^2\left(1 - \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2\ln x}{x}\right)$.

$\substack{x \to 0 \\ x > 0}$

**0,5 pt** **2 -** **a)** Vérifier que pour tout x de $]0, +\infty[$: $f(x) = x^2\left(1 - \frac{1}{x^2} - \frac{2\ln x}{x}\right)$.

**2 pt** **b)** Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis donner une interprétation géométrique.

**0,5 pt** **3 -** **a)** Montrer que pour tout $x$ de $]0, +\infty[$: $f'(x) = 2g(x)$..

**1 pt** **b)** En déduire le signe de $f'(x)$ sur $]0, +\infty[$ puis dresser le tableau de variation de $f$ sur $]0, +\infty[$.

**1,5 pt** **4 -** Montrer que $(C_f)$ admet un point d'inflexion $I$ qu'on déterminera.

## Exercice 1 : (5 pts )

Soit la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + \dfrac{1}{4} \; ; \; (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

**0,5 pt** **1 -** Calculer $u_1$ et $u_2$

**1 pt** **2 -** Montrer par récurrence pour tout $n$ de $\mathbb{N}$ ; $u_n > \dfrac{1}{2}$

**0,75 pt** **3 -** **a)** Montrer que : $u_{n+1} - u_n = -\dfrac{1}{2}\left(u_n - \dfrac{1}{2}\right)$

**0,5 pt** **b)** Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante et qu'elle est convergente

**4 -** On pose : $v_n = u_n - \dfrac{1}{2}$ pour tout $n$ de $\mathbb{N}$

**0,25 pt** **a)** Calculer $v_0$

**0,5 pt** **b)** Montrer que $(v_n)$ est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{2}$

**1 pt** **c)** Calculer $v_n$ en fonction de $n$ puis déduire que : $u_n = \dfrac{1}{2}\left(1 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right)$ pour tout $n$ de $\mathbb{N}$

**0,5 pt** **d)** Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

## Exercice 1 : (4.5 points)

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n - 4}{u_n - 3} \quad ; \quad (\forall n \in \mathbb{N}) . \end{cases}$

**0,5 pt** **1 -** Calculer $u_1$ et $u_2$ .

**0,25 pt** **2 -** **a)** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$ ; $u_{n+1} - 2 = \dfrac{u_n - 2}{3 - u_n}$.

**0,5 pt** **b)** Montrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N})$ : $u_n < 2$.

**0,5 pt** **3 -** **a)** Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$ : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(u_n - 2)^2}{3 - u_n}$.

**0,5 pt** **b)** En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante et qu'elle est convergente.

**4 -** On pose : $v_n = \dfrac{1}{2 - u_n}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ .

**0,75 pt** **a)** Calculer $v_{n+1} - v_n$ puis déduire que $(v_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite arithmétique de raison $r = 1$.

**0,5 pt** **b)** Calculer $v_0$ puis déterminer $v_n$ en fonction de $n$.

**0,75 pt** **c)** Montrer que : $u_n = 2 - \dfrac{1}{v_n}$ puis en déduire que : $u_n = \dfrac{2n+1}{n+1}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$.

**0,25 pt** **d)** Calculer : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ .

## Exercice 3 : (10 pts)

On considère la fonction numérique $f$ de la variable réelle $x$ sur $]0,+\infty[$ définie par : $f(x)=\dfrac{1}{x}+\ln(x)$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$.

**2.5 pt** **1 -** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ puis interpréter le résultat géométriquement.

**1.5 pt** **2 -** Vérifier que $f(x)=\dfrac{1+x\ln(x)}{x}$ et calculer $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$ puis interpréter le résultat géométriquement.

**0.5 pt** **3 -** **a)** Montrer que $f'(x)=\dfrac{x-1}{x^2}$ pour tous $x$ dans $]0,+\infty[$.

**1 pt** **b)** Étudier le signe de $f'(x)$ puis donner le tableau des variations de la fonction $f$.

**2 pt** **4 -** Calculer $f''(x)$ pour tous $x$ dans $]0,+\infty[$ puis montrer que $I\left(2;\dfrac{1}{2}+\ln 2\right)$ est un point d'inflexion de la courbe de la fonction $f$.

## Exercice 4 : (8 pts)

On considère la fonction numérique $f$ de la variable réelle $x$ définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = (x \ln x)^2 + 3x^2 - 3$$

1 pt **1 -** **a)** Calculer : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ .

1 pt **b)** Montrer que : $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -3$ .

2 pt **2 -** **a)** Calculer $f'(x)$ pour tout $x$ de $]0;+\infty[$ puis montrer que : $f'(x) = 2x\left((\frac{1}{2} + \ln x)^2 + \frac{11}{4}\right)$ .

1 pt **b)** En déduire le signe de $f'(x)$ sur $]0;+\infty[$ .

1 pt **c)** Donner le tableau de variations de $f(x)$ sur $]0;+\infty[$.

2 pt **d)** Calculer $f(1)$ puis déduire de ce qui précède le signe de $f(x)$ sur $]0;+\infty[$ .