Exercice 1 (15 pts) **Partie A** :

Soit f la fonction définie sur : $I =]0, +\infty[$ par : $f(x) = x + \frac{1}{2} - \ln(x) + \frac{1}{2}(\ln(x))^2$

et (C_f) sa courbe représentatives dans un repère orthonormée $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1) Calculer : $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ et donnée l'interprétation géométrique de ce résultat.	1
2) a) Vérifier que : $f(x) = x + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\ln(x) - 1\right)\ln(x)$	0.5
b) En déduire que : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$	0.75
c) Montrer que : $(\forall x \in]0, +\infty[)$: $\frac{(\ln(x))^2}{x} = 4\left(\frac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\right)^2$	0.5
puis déduire que : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(\ln(x))^2}{x} = 0$	0.5
d) Montrer que (C_f) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction la droite d'équation $(\Delta) : y = x$	1.25
3) a) Vérifier que : $(\forall x \in]0;1])$: $(x-1) + \ln(x) \leq 0$ et : $(\forall x \in [1;+\infty[)$: $(x-1) + \ln(x) \geq 0$.	1
b) Montrer que : $f'(x) = \frac{x - 1 + \ln(x)}{x}$ pour tous x de $]0, +\infty[$.	1.25
c) Donner le tableau de variations de la fonction f.	0.75
$f''(x) = \frac{2 - \ln(x)}{\ldots}$ pour tous x de $]0, +\infty[$	1.25

c) Donner le tableau de variations de la fonction f. 0.75

4) a) Montrer que : $f''(x) = \dfrac{2-\ln(x)}{x^2}$ pour tous x de $]0;+\infty[$. 1.25

b) En déduire la concavité de (C_f), et que : $A(e^2;f(e^2))$ est un point d'inflexion de (C_f). 1

5) Montrer que : $(\forall x \in]0;+\infty[) : f(x)-x = \dfrac{1}{2}(\ln(x)-1)^2$ et déduire la position relative de (C_f) et la droite $(\Delta) : y = x$. 1

6) Construire la droite (D) et la courbe (C_f) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$. 1.5

Partie B :

Soit (U_n) la suite définie par : $U_0 = 1$ et $(\forall n \in \mathbb{N}) : U_{n+1} = f(U_n)$

1) a) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : 1 \leq U_n \leq e$. 0.75

b) Montrer que la suite (U_n) est croissante. 0.75

c) En déduire que la suite (U_n) est convergente. 0.5

2) Calculer : $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$ 0.75

Exercice 2 (5 pts)

1) Résoudre les équations suivantes après avoir déterminer leurs ensemble de définition :

$(E_1) : \ln(x+2) = \ln(-x+4)$ 0.75

$(E_2) : \ln(x+3) + \ln(x+2) = \ln(20)$ 1

$(E_3) : \ln(x) = 6$ 0.5

2) Résoudre les inéquations suivantes après avoir déterminer leurs ensemble de définition :

$(I_1) : \ln(x+2) > \ln(-x+4)$ 0.75

$(I_2) : \ln(x+3) + \ln(x+2) > \ln(20)$ 1.25

3) Déterminer tous les primitives de la fonction f telle que : $f(x) = \dfrac{4x+5}{2x^2+5x+2}$ 0.75

Bon courage

Exercice 2 (5 pts)

1) Résoudre les équations suivantes après avoir déterminer leurs ensemble de définition :

$(E_1) : \ln(x+2) = \ln(-x+4)$ 0.75

$(E_2) : \ln(x+3) + \ln(x+2) = \ln(20)$ 1

$(E_3) : \ln(x) = 6$ 0.5

2) Résoudre les inéquations suivantes après avoir déterminer leurs ensemble de définition :

$(I_1) : \ln(x+2) > \ln(-x+4)$ 0.75

$(I_2) : \ln(x+3) + \ln(x+2) > \ln(20)$ 1.25

3) Déterminer tous les primitives de la fonction f telle que : $f(x) = \dfrac{4x+5}{2x^2+5x+2}$ 0.75

Bon courage