Exercice 2 :

Déterminer la limite de la suite (u_n) dans les cas suivants :

1. $u_n = \dfrac{5n^2+3}{2n-7}$
2. $u_n = \dfrac{7n+(-1)^n}{5n+3}$
3. $u_n = \dfrac{\cos(n)}{n^2+3}$
4. $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{1+n^2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2+n^2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3+n^2}} + \dots\dots\dots\dots + \dfrac{1}{\sqrt{n+n^2}}$
5. $u_n = \dfrac{3^n+5^n}{3^n+4\times 5^n}$

Résumé de leçon
(Les Suites Numérique)

1 La Suite Arithmétique et La Suite Géométrique : $(n;p) \in \mathbb{N}$ et $p \leqslant n$

•	La Suite Arithmétique	La Suite géométrique
Définition	$\forall n \in \mathbb{N}\,;\, U_{n+1} - U_n = r$	$\forall n \in \mathbb{N}\,;\, U_{n+1} = q \times U_n$
Le terme général	$U_n = U_p + (n-p)r$	$U_n = q^{(n-p)} \times U_p$
•	$U_n = U_0 + n \cdot r$	$U_n = q^n \times U_0$
$S_n = U_0 + U_1 + \ldots + U_n$	$= \dfrac{(n+1)}{2} \times (U_n + U_0)$	$= U_0 \times \dfrac{(1-q^{n+1})}{(1-q)}$

2 La suite majorée ; minorée ; bornée

(U_n) est une suite majorée par M $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}; U_n \leqslant M$
(U_n) est une suite minorée par m $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}; U_n \geqslant m$
(U_n) est une suite bornée par m et M; $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}$; $m \leqslant U_n \leqslant M$

3 La Monotone d'une suite

Si $\forall n \in \mathbb{N}$; $U_n \leqslant U_{n+1}$ alors (U_n) est une suite croissante.
Si $\forall n \in \mathbb{N}$; $U_{n+1} \leqslant U_n$ alors (U_n) est une suite décroissante.

4 Convergence de la suite (q^n)

* Si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty$
* Si $q = 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 1$
* Si $1 > q > -1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0$
* Si $q \leq -1$ alors la Suite (q^n) n'admet pas de limite.

5 La limite de la suite (n^α) où $\alpha \in \mathbb{Q}$

* Si $\alpha > 0$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} n^\alpha = +\infty$
* Si $\alpha < 0$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} n^\alpha = 0$

* Si (U_n) est croissante et majorée alors la suite (U_n) est convergente
* Si (U_n) est croissante et négative alors la suite (U_n) est convergente
* Si (U_n) est croissante et non majorée alors la suite (U_n) est divergente
* Si (U_n) est décroissante et minorée alors la suite (U_n) est convergente
* Si (U_n) est décroissante et positive alors la suite (U_n) est convergente
* Si (U_n) est décroissante et non minorée alors la suite (U_n) est divergente

7 Critères de convergence

* Si $\left.\begin{array}{l} V_n \leq U_n \leq W_n \\ et \\ \lim\limits_{+\infty} V_n = \lim\limits_{+\infty} W_n = l \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{+\infty} U_n = l$ avec $l \in \mathbb{R}$

* Si $\left.\begin{array}{l} |U_n - l| \leq \alpha V_n \ avec \ \alpha > 0 \\ et \\ \lim\limits_{+\infty} V_n = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{+\infty} U_n = l$ avec $l \in \mathbb{R}$

♣ $\left.\begin{array}{l} V_n \leq U_n \\ Si \ \ et \\ \lim\limits_{+\infty} V_n = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{+\infty} U_n = +\infty$ ♣ $\left.\begin{array}{l} V_n \leq U_n \\ Si \ \ et \\ \lim\limits_{+\infty} U_n = -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{+\infty} V_n = -\infty$

8 Limite d'une suite (U_n) définie par $U_{n+1} = f(U_n)$

f est fonction définit et continue sur l'intervalle I et $f(I) \subset I$

Si U_n convergente et $\left.\begin{array}{l} U_0 \subset I \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{array}\right\}$ alors $\lim\limits_{+\infty} U_n = l$ avec l est une solution de l'équation $f(x) = x$

Exercice 3 :

Considérons la suite (u_n) définie par : $u_0 = 10$ et $u_{n+1} = \frac{17}{19}u_n + \frac{18}{19}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

1. Montrer que : $u_n \geq 9$, pour tout n de $\mathbb{N}$
2. Montrer que (u_n) est décroissante , puis déduire qu'elle est convergente.
3. On pose , $v_n = u_n - 9$ pour tout n de $\mathbb{N}$
   a- Montrer que (v_n) est une suite géométrique
   b- Calculer v_n en fonction de n
   c- Déduire u_n en fonction de n, puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

Exercice 4 :

Considérons la suite (u_n) définie par : $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \frac{12 - 8u_n}{4 - 3u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

1. Montrer par récurrence que : $u_n > 2$, pour tout n de $\mathbb{N}$
2. On pose : $v_n = \frac{u_n}{u_n - 2}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

   a- Montrer que (v_n) est une suite arithmétique

   b- Calculer v_n en fonction de n

c- Déduire u_n en fonction de n, puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

Exercice 5 :

Considérons la suite (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{7u_n + 2}{2u_n + 7}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

1. Montrer par récurrence que : $u_n \geq 1$, pour tout n de $\mathbb{N}$
2. Montrer que (u_n) est décroissante et qu'elle est convergente
3. On pose : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

   a- Montrer que (v_n) est une suite géométrique

   b- Calculer v_n en fonction de n

   c- Déduire u_n en fonction de n, puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

Résumé de leçon
(Les Suites Numérique)

1 La Suite Arithmétique et La Suite Géométrique : $(n;p) \in \mathbb{N}$ et $p \leqslant n$

•	La Suite Arithmétique	La Suite géométrique
Définition	$\forall n \in \mathbb{N}$; $U_{n+1} - U_n = r$	$\forall n \in \mathbb{N}$; $U_{n+1} = q \times U_n$
Le terme général	$U_n = U_p + (n-p)r$	$U_n = q^{(n-p)} \times U_p$
•	$U_n = U_0 + n \cdot r$	$U_n = q^n \times U_0$
$S_n = U_0 + U_1 + \ldots + U_n$	$= \dfrac{(n+1)}{2} \times (U_n + U_0)$	$= U_0 \times \dfrac{(1-q^{n+1})}{(1-q)}$

2 La suite majorée ; minorée ; bornée

(U_n) est une suite majorée par M $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}; U_n \leqslant M$
(U_n) est une suite minorée par m $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}; U_n \geqslant m$
(U_n) est une suite bornée par m et M; $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}$; $m \leqslant U_n \leqslant M$

3 La Monotone d'une suite

Si $\forall n \in \mathbb{N}$; $U_n \leqslant U_{n+1}$ alors (U_n) est une suite croissante.
Si $\forall n \in \mathbb{N}$; $U_{n+1} \leqslant U_n$ alors (U_n) est une suite décroissante.

4 Convergence de la suite (q^n)

$*$ Si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty$

$*$ Si $q = 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 1$

$*$ Si $1 > q > -1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0$

$*$ Si $q \leq -1$ alors la Suite (q^n) n'admet pas de limite.

5 La limite de la suite (n^α) où $\alpha \in \mathbb{Q}$

$*$ Si $\alpha > 0$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} n^\alpha = +\infty$

$*$ Si $\alpha < 0$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} n^\alpha = 0$

6 Convergence d'une suite

- $*$ Si (U_n) est croissante et majorée alors la suite (U_n) est convergente
- $*$ Si (U_n) est croissante et négative alors la suite (U_n) est convergente
- $*$ Si (U_n) est croissante et non majorée alors la suite (U_n) est divergente
- $*$ Si (U_n) est décroissante et minorée alors la suite (U_n) est convergente
- $*$ Si (U_n) est décroissante et positive alors la suite (U_n) est convergente
- $*$ Si (U_n) est décroissante et non minorée alors la suite (U_n) est divergente

7 Critères de convergence

$$* \text{ Si } \left.\begin{array}{l} V_n \leq U_n \leq W_n \\ et \\ \lim\limits_{+\infty} V_n = \lim\limits_{+\infty} W_n = l \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{+\infty} U_n = l \quad \text{avec } l \in \mathbb{R}$$

$$* \text{ Si } \left.\begin{array}{l} |U_n - l| \leq \alpha V_n \;\; avec \;\; \alpha > 0 \\ et \\ \lim\limits_{+\infty} V_n = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{+\infty} U_n = l \quad \text{avec } l \in \mathbb{R}$$

$$\clubsuit \left.\begin{array}{l} V_n \leq U_n \\ Si \;\; et \\ \lim\limits_{+\infty} V_n = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{+\infty} U_n = +\infty \quad \clubsuit \left.\begin{array}{l} V_n \leq U_n \\ Si \;\; et \\ \lim\limits_{+\infty} U_n = -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{+\infty} V_n = -\infty$$

8 Limite d'une suite (U_n) définie par $U_{n+1} = f(U_n)$

f est fonction définit et continue sur l'intervalle I et $f(I) \subset I$

Si U_n convergente et $\left.\begin{array}{l} U_0 \subset I \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{array}\right\}$ alors $\lim\limits_{+\infty} U_n = l$ avec l est une solution de l'équation $f(x) = x$

Résumé de leçon
(Les Suites Numérique)

1 La Suite Arithmétique et La Suite Géométrique :$(n;p) \in \mathbb{N}$ et $p \leqslant n$

•	La Suite Arithmétique	La Suite géométrique
Définition	$\forall n \in \mathbb{N}$; $U_{n+1} - U_n = r$	$\forall n \in \mathbb{N}$; $U_{n+1} = q \times U_n$
Le terme général	$U_n = U_p + (n-p)r$	$U_n = q^{(n-p)} \times U_p$
•	$U_n = U_0 + n \cdot r$	$U_n = q^n \times U_0$
$S_n = U_0 + U_1 + \ldots + U_n$	$= \dfrac{(n+1)}{2} \times (U_n + U_0)$	$= U_0 \times \dfrac{(1-q^{n+1})}{(1-q)}$

2 La suite majorée ; minorée ; bornée

(U_n) est une suite majorée par M $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}; U_n \leqslant M$
(U_n) est une suite minorée par m $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}; U_n \geqslant m$
(U_n) est une suite bornée par m et M; $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}$; $m \leqslant U_n \leqslant M$

3 La Monotone d'une suite

Si $\forall n \in \mathbb{N}$; $U_n \leqslant U_{n+1}$ alors (U_n) est une suite croissante.
Si $\forall n \in \mathbb{N}$; $U_{n+1} \leqslant U_n$ alors (U_n) est une suite décroissante.

4 Convergence de la suite (q^n)

* Si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty$
* Si $q = 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 1$
* Si $1 > q > -1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0$
* Si $q \leq -1$ alors la Suite (q^n) n'admet pas de limite.

5 La limite de la suite (n^α) où $\alpha \in \mathbb{Q}$

* Si $\alpha > 0$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} n^\alpha = +\infty$
* Si $\alpha < 0$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} n^\alpha = 0$

6 Convergence d'une suite

- $*$ Si (U_n) est croissante et majorée alors la suite (U_n) est convergente
- $*$ Si (U_n) est croissante et négative alors la suite (U_n) est convergente
- $*$ Si (U_n) est croissante et non majorée alors la suite (U_n) est divergente
- $*$ Si (U_n) est décroissante et minorée alors la suite (U_n) est convergente
- $*$ Si (U_n) est décroissante et positive alors la suite (U_n) est convergente
- $*$ Si (U_n) est décroissante et non minorée alors la suite (U_n) est divergente

7 Critères de convergence

$$* \text{ Si } \left.\begin{array}{l} V_n \leq U_n \leq W_n \\ et \\ \lim\limits_{+\infty} V_n = \lim\limits_{+\infty} W_n = l \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{+\infty} U_n = l \quad \text{avec } l \in \mathbb{R}$$

$$* \text{ Si } \left.\begin{array}{l} |U_n - l| \leq \alpha V_n \;\; avec \;\; \alpha > 0 \\ et \\ \lim\limits_{+\infty} V_n = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{+\infty} U_n = l \quad \text{avec } l \in \mathbb{R}$$

$$\clubsuit \left.\begin{array}{l} V_n \leq U_n \\ Si \;\; et \\ \lim\limits_{+\infty} V_n = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{+\infty} U_n = +\infty \qquad \clubsuit \left.\begin{array}{l} V_n \leq U_n \\ Si \;\; et \\ \lim\limits_{+\infty} U_n = -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{+\infty} V_n = -\infty$$

8 Limite d'une suite (U_n) définie par $U_{n+1} = f(U_n)$

f est fonction définit et continue sur l'intervalle I et $f(I) \subset I$

Si U_n convergente et $\left.\begin{array}{l} U_0 \subset I \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{array}\right\}$ alors $\lim\limits_{+\infty} U_n = l$ avec l est une solution de l'équation $f(x) = x$