Prof oulahri	Chapitre 5 : les suites numériques **19-12-2024**

Exercice 2 :

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{4} \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}{u_n}^2 + \frac{1}{2}u_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq u_n \leq 1$

Exercice 3 :

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = \frac{-5}{4} \\ u_{n+1} = (u_n+2)^2 - 2 \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad -2 \leq u_n \leq -1$

2) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n = (u_n+1)(u_n+2)$

3) En déduire la monotonie de (u_n)

Exercice 4 :

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{3u_n}{21+u_n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n > 0$

2) Montrer que $u_{n+1} \leq \frac{1}{7}u_n$ **pour tout** n **de** $\mathbb{N}$

3) Montrer que la suite (u_n) **est décroissante**

4) Montrer par récurrence que $u_n \leq \left(\frac{1}{7}\right)^n$ **pour tout** n **de** $\mathbb{N}$

Exercice 5 :

On considère la suite numérique (U_n) **définie par :** $U_0 = 5$ **et** $(\forall n \in \mathbb{N})\ ; U_{n+1} = \frac{4U_n - 9}{U_n - 2}$

1) Montrer que $U_n > 3$

2) Montrer que la suite (U_n) **est décroissante.**

3) on pose $(\forall n \in \mathbb{N}); W_n = \frac{1}{U_n - 3}$

a) Montrer que (W_n) **est une suite arithmétique en précisant sa raison (** $W_{n+1} - W_n = r$ **)**

b) En déduire W_n **et** U_n **en fonction de** n **. (** $W_n = W_0 + nr$ **)**

c) En déduire U_n **en fonction de** n **.**

d) Calculer en fonction de n **la somme suivante :** $S_n = W_0 + W_1 + \cdots\cdots\cdots + W_n$

Exercice 6 :

On considère la suite (u_n) **définie par :** $\begin{cases} u_0 = -5 \\ u_{n+1} = \frac{-7u_n - 8}{2u_n + 1} \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

pour tout n **de** $\mathbb{N}$ **on pose :** $v_n = \frac{1}{u_n + 2}$

1) a- Montrer que : $v_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{-3u_n - 6}$

b- Montrer que (v_n) **est arithmétique dont on déterminera la raison.**

2) a- Exprimer v_n **en fonction de** n

b- Montrer que : $u_n = \frac{1 - 2v_n}{v_n}$ **, puis exprimer** u_n **en fonction de** n

Exercice 7 :

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{7u_n+2}{2u_n+7} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1) a- Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geq 1$

b- Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

2) On pose pour tout n de $\mathbb{N}$ $\quad v_n = \frac{u_n-1}{u_n+1}$

a- Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$ on a : $v_{n+1} = \frac{5(u_n-1)}{9(u_n+1)}$ et déduire que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{5}{9}$

b- Exprimer v_n en fonction de n

c- Montrer que : $u_n = \frac{1+v_n}{1-v_n}$ puis exprimer u_n en fonction de n