

**Exercice 9:**

Soit  $(U_n)$  une suite numérique définie par : 
$$\begin{cases} U_0 = 5 \\ (\forall n \in \mathbb{N}); U_{n+1} = \frac{5U_n - 4}{U_n} \end{cases}$$

1) a) Calculer  $U_1$ .

b) Montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}); U_n > 4$

2) a) Vérifier que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$   $U_{n+1} - U_n = \frac{(U_n - 1)(4 - U_n)}{U_n}$

b) Montrer que la suite  $(U_n)$  est décroissante.

3) on considère la suite  $(V_n)$  définie par  $(\forall n \in \mathbb{N}); V_n = \frac{U_n - 4}{U_n - 1}$

a) Montrer que  $(V_n)$  est une suite géométrique de raison  $q = \frac{1}{4}$  ; puis calculer son premier terme  $V_0$ .

b) Exprimer  $V_n$  en fonction de  $n$ .

c) Dédire que :  $(\forall n \in \mathbb{N}); U_n = \frac{1 - 4^{n+2}}{1 - 4^{n+1}}$

4) on pose  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_{n-1}$ .

**Exercice 10:**

Soit  $(u_n)$  une suite numérique définie par :  $u_0 = \frac{9}{2}$  et  $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = \frac{10u_n - 16}{u_n + 2}$

1) Calculer  $u_1$  et  $u_2$

2) a- Montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n > 4$ .

b- Vérifier que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ :  $u_{n+1} - u_n = \frac{-(u_n - 4)^2}{u_n + 2}$

c- En déduire que la suite  $(u_n)$  est décroissante et qu'elle est convergente

3) on pose  $(\forall n \in \mathbb{N}); v_n = \frac{u_n}{u_n - 2}$ .

a- Calculer  $v_0$ .

b- Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}); v_{n+1} = \frac{5u_n - 8}{3(u_n - 4)}$

c- Dédire que la suite  $(v_n)$  est arithmétique de raison  $r = \frac{2}{3}$ .

d- Exprimer  $v_n$  et  $u_n$  en fonction de  $n$ .

**Exercice 11:**

On considère la suite  $(u_n)$  définie par :  $u_0 = 1$  et  $u_{n+1} = \frac{u_n^3}{3u_n^2 + 1}$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$

1) a- Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 < u_n$

b- Montrer que la suite  $(u_n)$  est décroissante

2) a- Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} \leq \frac{1}{3} u_n$

b- Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$