| Prof oulahri | Chapitre 5 : les suites numériques<br>26-12-2024 |
| --- | --- |

## Exercice 7 :

On considère la suite $(u_n)$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{7u_n+2}{2u_n+7} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1) a- Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geq 1$

b- Montrer que la suite $(u_n)$ est décroissante.

2) On pose pour tout $n$ de $\mathbb{N}$ $\quad v_n = \frac{u_n-1}{u_n+1}$

a- Montrer que pour tout $n$ de $\mathbb{N}$ on a : $v_{n+1} = \frac{5(u_n-1)}{9(u_n+1)}$ et déduire que la suite $(v_n)$ est géométrique de raison $\frac{5}{9}$

b- Exprimer $v_n$ en fonction de $n$

c. calculer : $S = V_0 + V_1 + \dots\dots + V_9$ et $T = V_1 + V_2 + \dots\dots + V_n$

d- Montrer que : $u_n = \frac{1+v_n}{1-v_n}$ puis exprimer $u_n$ en fonction de $n$

## Exercice 8 :

On considère la suite $(u_n)$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{5u_n}{2u_n+3} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n > 1$

2) On pose pour tout $n$ de $\mathbb{N}$ $\quad v_n = \frac{u_n-1}{u_n}$

a- Déduire que la suite $(v_n)$ est géométrique de raison $\frac{3}{5}$

b- Exprimer $v_n$ en fonction de $n$

c- Montrer que : $u_n = \frac{2}{2-\left(\frac{3}{5}\right)^n}$ pour tout $n$ de $\mathbb{N}$

## Exercice 9:

Soit $(U_n)$ une suite numérique définie par : $\begin{cases} U_0 = 5 \\ (\forall n \in \mathbb{N}); U_{n+1} = \frac{5U_n - 4}{U_n} \end{cases}$

1) a) Calculer $U_1$.

b) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}); U_n > 4$

2) a) Vérifier que pour tout $n$ de $\mathbb{N}$ $\quad U_{n+1} - U_n = \frac{(\boldsymbol{U}_n - 1)(4 - \boldsymbol{U}_n)}{\boldsymbol{U}_n}$

b) Montrer que la suite $(\boldsymbol{U}_n)$ est décroissante.

3) on considère la suite $(\boldsymbol{V}_n)$ définie par $(\forall n \in \mathbb{N}); V_n = \frac{U_n - 4}{U_n - 1}$

a) Montrer que $(V_n)$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{4}$ ; puis calculer son premier terme $V_0$.

b) Exprimer $\boldsymbol{V}_n$ en fonction de $n$ .

c) Déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}); U_n = \frac{1-4^{n+2}}{1-4^{n+1}}$

4) on pose $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $\quad S_n = V_0 + V_1 + \cdots\cdots + V_{n-1}$ .

## Exercice 10:

On considère la suite $(u_n)$ définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{{u_n}^3}{3{u_n}^2+1}$ pour tout $n$ de $\mathbb{N}$

1) a- Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 < u_n$

b- Montrer que la suite $(u_n)$ est décroissante

2) a- Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} \leq \frac{1}{3} u_n$

b- Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n \leq (\frac{1}{3})^n$