Fonction logarithme

Exercice 1

Calculer les limites suivantes

$\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)$	$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{x\ln x}$	$\lim_{x\to+\infty} \frac{1-2\ln x}{3+\ln x}$	$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(2x+3)}{\sqrt[3]{x}}$
$\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x+1}\ln\left(\frac{x^3+1}{x^2+2}\right)$	$\lim_{x\to0} \frac{\ln(+2\tan x)}{x}$	$\lim_{x\to1} \frac{x^2+2x-3}{\ln x}$	
$\lim_{x\to+\infty} (x+2)\ln x - x\ln(x+2)$	$\lim_{\substack{x\to1\\x>1}} (x^2-1)\ln(x^2+2x-3)$		

Exercice 2

Partie (1) *Soit* g *la fonction définie sur* $[0,+\infty[$ *par :* $g(x)=x-2(x+1)\ln(x+1)$

1) *montrer que* $\lim_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$

2) a) *calculer* $g'(x)$ *et montrer que* g *est décroissante*

b) *en déduire que* $(\forall x\in\,]0,+\infty[)\quad g(x)<0$

Partie (2) *On considère la fonction* f *définie sur* $]0,+\infty[$ *par :* $f(x)=\dfrac{\ln(1+\sqrt{x})}{x}$

1) *montrer que* $\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)=+\infty$ *poser* $t=\sqrt{x}$

2) *montrer que* $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ *interpréter graphiquement le résultat*

3) a) *montrer que* $f'(x)=\dfrac{g(\sqrt{x})}{2x^2(1+\sqrt{x})}$

b) *dresser le tableau de variations de* f

4) *tracer la courbe* (C_f)

manti.1s.fr

Exercice 3

Partie (1) *On pose* $g(x)=x-4+4\ln x$

1) *calculer les limites* $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ *et* $\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} g(x)$

2) *calculer* $g'(x)$ *puis donner le tableau de variation de*

3) a) *montrer que l'équation* $g(x)=0$ *admet dans* $]1,2[$ *une seule solution* α

b) *en déduire que :* $g(x)>0$ *sur* $]\alpha,+\infty[$ *et* $g(x)<0$ *sur* $]0,+\infty[$

Partie (2)

Soit f *la fonction définie sur* $]0,+\infty[$ *par :* $f(x)=\left(1-\dfrac{4}{x}\right)\ln x$

fonction logarithme

1) montrer que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=+\infty$ interpréter géométriquement le résultat

2) montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$ donner une interprétation graphique

3) a) montrer que $(\forall x>0)\quad f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$

b) vérifier que $f(\alpha)=-\dfrac{4}{\alpha}(\ln\alpha)^2$ puis dresser le tableau de variation de f

4) tracer (C_f) on donne $\alpha\simeq 1{,}75$; $f(\alpha)\simeq -0{,}72$ et $f(1)=f(4)=0$

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $]-\infty,-1[\cup[0,+\infty[$ par : $f(x)=x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$; $x\neq 0$ et $f(0)=0$

Partie (1)

1) a) montrer que f est continue à droite de $x_0=0$

b) étudier la dérivabilité de f à droite de $x_0=0$

2) calculer les limites de la fonction f

3) calculer $f'(x)$ et étudier le sens de variation de f

puis donner le tableau de variation

4) tracer la courbe (ζ_f)

Partie (2)

On considère la fonction g telle que : $g(x)=f(-1-x)$

1) déterminer le domaine de définition de g

2) montrer que les courbes de g et f sont symétrique parapport à (Δ) $x=-\dfrac{1}{2}$

3) a) montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*\qquad f(n)<1<g(n)$

b) en déduire que $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\qquad \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n<e<\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$

Exercice 5

On pose $U_n=\sum\limits_{k=1}^{k=n}\dfrac{1}{k}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$

1) en utilisant le théorème des accroissements finis montrer que :

$(\forall k\in\mathbb{N}^*)\qquad \dfrac{1}{k+1}\leq\ln(k+1)-\ln k\leq\dfrac{1}{k}$

2) a) montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\quad U_{n+1}-1\leq\ln(n+1)\leq U_n$

b) en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}U_n$

3) on considère la suite $(V_n)_n$ définie par : $V_n = U_{n+1} - \ln n \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$

On pose $f(x) = \frac{1}{x} - \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$ et $g(x) = \frac{1}{x+1} - \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$ pour tout x de $]0,+\infty[$

a) Dresser le tableau de g et f

b) En déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad 0 < f(n) < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

c) Vérifier que $V_n = \sum_{k=1}^{k=n-1} f(k)$ en déduire que $(V_n)_n$ est décroissante

d) Montrer que $(\forall n > 1) \quad f(1) < V_n < 1 - \frac{1}{n}$ déduire que $(V_n)_n$ est convergente puis encadrer sa limite a

Exercice 6

Soit n de $\mathbb{N}^*$. on considère la fonction f_n telle que $f_n(x) = (x-n)\ln(x) - x\ln(x-n)$

1) a) résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $(x+1)^2 < 2x^2$

b) montrer que $(\forall p \in \mathbb{N}) \quad p \geq 5 \Rightarrow p^2 < 2^p$

c) étudier le signe de $f_n(n+1)$ et $f_n(n+2)$

2) calculer $f_n'(x)$ et $f_n''(x)$ puis dresser le tableau de f_n

3) a) calculer la limite $\lim\limits_{\substack{x\to n \\ x>n}} f_n(x)$

b) montrer que $(\forall x > n) \quad f_n(x) = -n\ln(x) - x\ln\left(1 - \frac{n}{x}\right)$

c) calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$

4) tracer la courbe de la fonction f_3

5) a) montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une seule solution α_n

b) montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} (\alpha_n - n) = 1$ puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} (\alpha_{n+1} - \alpha_n)$

Exercice 7

Partie (1) Soit la fonction g définie par : $g(x) = x + 1 + \ln x$

1) calculer $g'(x)$ et montrer que g est croissante sur $]0,+\infty[$

2) montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution α puis que $\alpha < \frac{1}{e}$

3) déduire le signe de $g(x)$ sur $]0,+\infty[$

Partie (2) On considère la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x\ln x}{x+1} \quad ; \quad x \neq 0 \quad \text{et} \quad f(0) = 0$$

fonction logarithm

1) a) *montrer que* f *est continue à droite de* 0

b) *étudier la dérivabilité de* f ع *à droite de* 0

2) a) *calculer la limite* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

b) *étudier la branche infinie de* (C_f) *au voisinage de* $+\infty$

3) a) *montrer que :* $(\forall x > 0)\quad f'(x) = \dfrac{g(x)}{(x+1)^2}$

b) *vérifier que* $f(\alpha) = -\alpha$ *et dresser le tableau de variation de* f

4) *tracer la courbe* (C_f) *(on donne* $\alpha \simeq 0,28$ *)*

Partie (3) soit n un entier naturel

1) montrer que l'équation $f(x) = n$ admet dans $]0,+\infty[$ une unique solution x_n

2) montrer que $f(e^n) < n$ en déduire que $x_n > e^n$ et calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n$

3) montrer que $\ln\left(\dfrac{x_n}{e^n}\right) = \dfrac{n}{x_n}$ puis déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x_n}{e^n}$

Exercice 8

Partie (1) *On considère la fonction* f *définie par :* $f(x) = \dfrac{1}{x} + \ln\left(\dfrac{1}{x+1}\right)$

1) *déterminer le domaine de* f *et calculer les limites de* f

2) *calculer la dérivée* $f'(x)$ *et dresser le tableau de variation de* f

3) *soit* m *un paramètre de* $\mathbb{R}^{+*}$.

a) *montrer que* $\dfrac{1}{m+1} \leq \ln\left(\dfrac{m+1}{m}\right) \leq \dfrac{1}{m}$

b) *déduire que* $\left(\forall m \in \mathbb{R}^{+*}\right)\quad 0 < f(m) < \dfrac{1}{m(m+1)}$

Partie (2)

On pose $U_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} + \ldots.. + \dfrac{1}{n+n}$ *et* $T_n = f(n) + f(n+1) + \ldots.. + f(n+n)\ /\ \forall n \in \mathbb{N}^*$

a) *montrer que* $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right)\quad 0 < T_n \leq \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n+1}$ *calculer* $\lim\limits_{n \to +\infty} T_n$

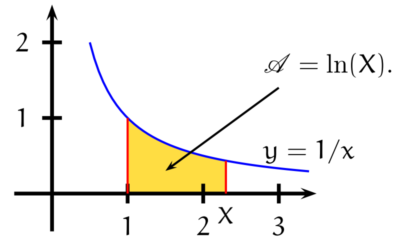
b) *montrer que* $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right)\quad T_n = U_n - \ln\left(\dfrac{2n+1}{n}\right)$ *en déduire* $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

c) *on pose* $V_n = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots\ldots + \dfrac{(-1)^{2n}}{2n}$

montrer que $U_n - \dfrac{1}{n} \leq V_n \leq U_n + \dfrac{1}{n}\ \left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right)$ *puis déterminer* $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n$

La fonction logarithme népérien

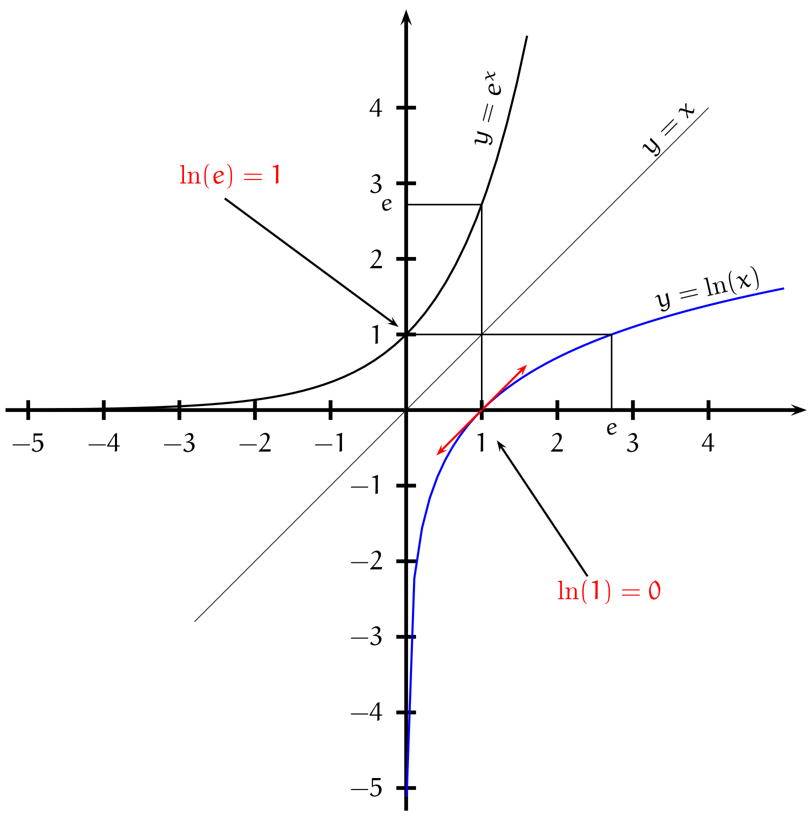
Définition de la fonction logarithme népérien



La fonction logarithme est l'unique fonction f, définie et dérivable sur $]0, +\infty[$ et vérifiant $f(1) = 0$ et pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = \frac{1}{x}$.

ln est la primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$ qui s'annule en 1.

$\boxed{\text{Pour tout réel } x > 0,\ \ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt.}$



Propriétés analytiques

- La fonction logarithme népérien est définie et dérivable sur $]0, +\infty[$ et

$\boxed{\text{Pour tout réel } x > 0,\ (\ln)'(x) = \frac{1}{x}.}$

- La fonction logarithme népérien est continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$.
- Limites aux bornes du domaine :

$\boxed{\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln(x) = -\infty,\quad \lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty.}$

- Théorèmes de croissances comparées :

$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \text{ et } \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x\ln(x) = 0.}$

pour tout entier naturel non nul n,

$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0 \text{ et } \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x^n\ln(x) = 0.}$

- Nombre dérivé en 1 :

$\boxed{\lim_{h \to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1.}$

Propriétés algébriques

Pour tous réels $x > 0$ et $y > 0$, $\ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y)$.	Pour tous réels $x > 0$ et $y > 0$, $\ln(x) + \ln(y) = \ln(x \times y)$.
Pour tout réel $x > 0$, $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$.	Pour tout réel $x > 0$, $-\ln(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$.
Pour tous réels $x > 0$ et $y > 0$, $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$.	Pour tous réels $x > 0$ et $y > 0$, $\ln(x) - \ln(y) = \ln\left(\frac{x}{y}\right)$.
Pour tout réel $x > 0$ et tout entier relatif n, $\ln(x^n) = n\ln(x)$.	Pour tout réel $x > 0$ et tout entier relatif n, $n\ln(x) = \ln(x^n)$.

Liens avec la fonction exponentielle

$\boxed{\text{Pour tout réel } x,\ \ln(e^x) = x. \quad \text{Pour tout réel } x \text{ strictement positif, } e^{\ln(x)} = x.}$

Résolution d'équations et d'inéquations

Pour tout réel a, l'équation $\ln(x) = a$ a une solution et une seule.

$\boxed{\text{Pour tous réels } x > 0 \text{ et } y > 0,\ (\ln(x) = \ln(y) \Leftrightarrow x = y). \quad \text{Pour tout réel } x > 0 \text{ et tout réel } a,\ \ln(x) = a \Leftrightarrow x = e^a.}$

La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0, +\infty[$. Donc

$\boxed{\text{Pour tous réels } x > 0 \text{ et } y > 0,\ (\ln(x) < \ln(y) \Leftrightarrow x < y). \quad \text{Pour tout réel } x > 0 \text{ et tout réel } a,\ \ln(x) < a \Leftrightarrow x < e^a.}$