Les suites numériques

Exercice 1

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par: $\begin{cases} u_0 = 6 \\ u_{n+1} = u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6} \quad ; (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$

1. Montrer que: $\forall n \in \mathbb{N}, 3 \leq u_n$
2. On considère la suite (v_n) définie par : $v_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{v_n}$
   Montrer que: $\forall n \in \mathbb{N}^*, \dfrac{3}{2} \leq v_n \leq 2$

Exercice 2

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par: $\begin{cases} u_0 = \dfrac{3}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + u_n}{u_n^2 + 1} \quad ; (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$

1. a. Calculer u_1
   b. Montrer que: $\forall n \in \mathbb{N}, 1 < u_n$
2. Etudier la monotonie de la suite (u_n)
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - 1 \leq \dfrac{1}{2}(u_n - 1)$

Exercice 3

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par: $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 5 - \dfrac{4}{u_n} \quad ; (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$

1. a. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}; 2 \leq u_n \leq 4$
   b. Etudier la monotonie de la suite (u_n)
2. a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 4 - u_{n+1} \leq \dfrac{1}{2}(4 - u_n)$
   b. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq 4 - u_n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$
   c. calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

Exercice 4

1. soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison 2 et de premier terme $u_0 = -5$.
   a. Calculer u_{10} et u_{30}
   b. Calculer la somme $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_{30}$

2. soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique telles que $u_5 = -12$ et $u_{11} = -30$.
   - a. Calculer la raison de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et son premier terme v_1
   - b. Calculer la somme $S_n = v_5 + u_1 + v_2 + ... + v_{11}$

Exercice 5

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par: $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{5u_n}{3u_n+5} & ;(\forall n\in\mathbb{N}) \end{cases}$

1. Montrer par récurrence que: $\forall n\in\mathbb{N}, 0 < u_n$
2. On pose $\forall n\in\mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{5}{u_n}$
   - a. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique et préciser sa raison et son premier terme
   - b. En déduire v_n puis u_n en fonction de n.

Exercice 6

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par:
$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \dfrac{4u_n-9}{u_n-2} & ;(\forall n\in\mathbb{N}) \end{cases}$

1. Montrer par récurrence que: $\forall n\in\mathbb{N}, 3 < u_n$
2. On pose $\forall n\in\mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{1}{u_n-3}$
   - a. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique et préciser sa raison et son premier terme
   - b. En déduire v_n puis u_n en fonction de n.
3. On pose : $\forall n\in\mathbb{N}$; $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_n$,
   Calculer S_n en fonction de n .

Exercice 7

1. soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q = 3$ et de premier terme $u_1 = -2$.
   Calculer la somme $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_{10}$
2. soit (v_n) une suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{2}$ telle que $u_3 = -5$.
   Calculer la somme $S'_n = v_3 + u_4 + ... + v_{15}$

Exercice 8

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par:

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{8u_n+3}{u_n+6} \quad ; (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

1. (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \dfrac{1}{2} \leq u_n < 3$.

   (b) Montrer que la suite (u_n) est croissante

2. On pose $\forall n \in \mathbb{N}\ , v_n = \dfrac{u_n - 3}{u_n + 1}$

   (a) Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométriqu et préciser sa raison et son premier terme

   (b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

   (c) calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

Exercice 9

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par: $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{3}{2}u_n + 1 \quad ; (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$ On pose $\forall n \in \mathbb{N}\ , v_n = u_n + 2$

1. Calculer v_0 et n_1

2. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométriqu et préciser sa raison et son premier terme

3. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

4. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}\ , S_n = v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_n$,
   Calculer S_n en fonction de n .

Exercice 10

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par: $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \dfrac{5u_n - 4}{u_n} \quad ; (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$

1. (a) Calculer u_1

   (b) Montrer par récurrence que: $\forall n \in \mathbb{N}; 4 < u_n$

2. (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ u_{n+1} - u_n = \dfrac{(u_n - 1)(4 - u_n)}{u_n}$

   (b) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante , puis déduire que $\forall n \in \mathbb{N}\ , u_n \leq 5$

3. on considère la suite définie par :: $\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ v_n = \dfrac{u_n - 4}{u_n - 1}$,

   (a) Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{4}$, puis calculer v_0

   (b) En déduire v_n en fonction de n.

   (c) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ u_n = \dfrac{\left(\frac{1}{4}\right)^n - 16}{\left(\frac{1}{4}\right)^n - 4}$

(d) Calculer $\lim_{n\to+\infty} u_n$

(e) On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_{n-1}$,
Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $S_n = \frac{1}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$,puis calculer $\lim_{n\to+\infty} S_n$

Exercice 11

1. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$: $2 \leq u_n \leq \frac{7}{2}$.

2. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$: $|u_{n+1}-3| \leq \frac{1}{2}|u_n-3|$.

3. En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$: $|u_n-3| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

4. Calculer la limite de la suite (u_n).

5. On pose pour tout n de $\mathbb{N}$: $v_n = \dfrac{u_n-3}{u_n+1}$

   (a) Montrer que (v_n) est suite géométrique dont on précisera la raison.

   (b) En déduire, en fonction de n, l'expression de v_n puis celle de u_n.

   (c) Calculer $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 12

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par:

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n-3}{u_n+5} \quad ; (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

1. (a) Calculer u_1

   (b) Montrer par récurrence que: $\forall n \in \mathbb{N}; -1 < u_n$

2. (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$; $u_{n+1} - u_n = -\dfrac{(u_n+1)(3+u_n)}{u_n+5}$

   (b) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante , puis déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$,$-1 < u_n \leq 0$

3. on considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :: $\forall n \in \mathbb{N}$; $v_n = \dfrac{u_n+1}{u_n+3}$,

   (a) Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$, puis calculer v_0

   (b) En déduire v_n en fonction de n.

   (c) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$; $u_n = \dfrac{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n}{3\left(\dfrac{1}{2}\right)^n - 1}$, puis calculer $\lim_{n\to+\infty} u_n$

4. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$; $u_{n+1} + 1 \leq \dfrac{1}{2}(u_n+1)$,

   (b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$; $u_n + 1 \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

   (c) Retrouver $\lim_{n\to+\infty} u_n$

Exercice 13

On considère les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par:
$\begin{cases} u_0 = 1 \;\; et \;\; u_1 = 2 \\ u_{n+2} = \dfrac{u_n + u_{n+1}}{2} \quad ; (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$ et $\forall n \in \mathbb{N})\ v_n = u_{n+1} - u_n$
On pose pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_{n-1}$

1. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique en déterminant sa raison q,puis en déduire v_n en fonction de n.
2. Calculer par deux méthodes différentes la somme S_n , puis déduire l'expression de u_n en fonction de n pour tout n de $\mathbb{N}^*$

Exercice 14

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par: $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = \dfrac{4+u_n}{5-u_n} \quad ; (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$

1. Caclculer u_1 et u_2
2. Montrer par récurrence que: $\forall n \in \mathbb{N}; -1 \leq u_n < 2$
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, (u_{n+1}) - u_n = \dfrac{(u_n-2)^2}{5-u_n}$, puis en déduire la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
4. On considère la suite (v_n) tel que $v_n = \dfrac{1+u_n}{2-u_n}$; $\forall n \in \mathbb{N}$.
   a. Montrer que la suite (v_n) est arithmétique de raison $r = 1$ et déterminer le premier terme v_0.
   b. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n pour tout n de $\mathbb{N}$
5. On considère la suite (w_n) tel que $w_{n+1} = (u_n + \dfrac{5}{n+1})w_n$; $\forall n \in \mathbb{N}$ et $w_0 = 1$
   et pour tout n de $\mathbb{N}$ on pose $X_n = \dfrac{w_n}{n+1}$ et $S_n = w_0 + w_1 + ... + w_n$
   Montrer que la suite (X_n) est géométrique et exprimer v_n en fonction de $\mathbb{N}$.

Exercice 15

1. Déterminer la limite de la suie $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans les cas :
   a. $u_n = 1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{27}....... + \dfrac{1}{3^n}$, $n \in \mathbb{N}$
   b. $u_n = \dfrac{5n^2+3}{2n-7}$, $n \in \mathbb{N}$
   c. $u_n = \dfrac{7n+(-1)^n}{5n+3}$, $n \in \mathbb{N}$
   d. $u_n = \dfrac{5^n+3^n}{5^n \times 4 + 3^n}$, $n \in \mathbb{N}$
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite définie par :$u_n = \dfrac{1}{\sqrt{1+n^2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2+n^2}} .... + \dfrac{1}{\sqrt{n+n^2}}$;
   a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$,Montrer que pour tout k de $\mathbb{N}$ tel que $1 \leq k \leq n$ on a : $\dfrac{1}{\sqrt{n+n^2}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{k+n^2}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{1+n^2}}$

(b) En déduire que: $\frac{n}{\sqrt{n+n^2}} \leq u_n \leq \frac{n}{\sqrt{1+n^2}}$

(c) En déduire : $\lim_{n\to+\infty} u_n$

Exercice 16

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par: $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{8(u_n-1)}{u_n+2} \end{cases}$; $(\forall n \in \mathbb{N})$

1. Montrer par récurrence que: $\forall n \in \mathbb{N}; 2 < u_n < 4$

2. (a) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante ,puis en déduire que $\forall n \in \mathbb{N}; 3 < u_n < 4$

   (b) En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente

3. (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}; 0 < 4 - u_{n+1} \leq \frac{4}{5}(4-u_n)$

   (b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$;$0 < 4 - u_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$
   , puis calculer $\lim_{n\to+\infty} u_n$

4. On pose $\forall n \in \mathbb{N}$; $v_n = \frac{u_n - 4}{u_n - 2}$

   (a) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$

   (b) En déduire que v_n , puis u_n en fonction de n.

   (c) Retrouver alors $\lim_{n\to+\infty} u_n$

5. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}$; $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots\dots + v_n$,
   et $T_n = \frac{2}{u_0-2} + \frac{2}{u_1-2} + \frac{2}{u_2-2} + \dots\dots + \frac{2}{u_n-2}$

   (a) Calculer S_n et T_n en fonction de n .

   (b) En déduire que : $\lim_{n\to+\infty} S_n$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{T_n}{n}$

Exercice 17

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n+2}{u_n+3} \end{cases}$;$(\forall n \in \mathbb{N})$

1. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$; $u_n > 1$

2. (a) Vérifier que $(\forall n \in \mathbb{N})$: $u_{n+1} - u_n = \frac{(1-u_n)(u_n+2)}{u_n+3}$

   (b) En déduire que la suite (u_n) est décroissante et qu'elle est convergente

3. On considère la suite (v_n) définie par: $v_n = \frac{u_n-1}{u_n+2}$; $(\forall n \in \mathbb{N})$

(a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$

(b) Écrire v_n en fonction de n puis en déduire u_n en fonction de n .

(c) Calculer $\lim_{x \to +\infty} u_n$

Exercice 18

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par: $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 2}{u_n + 2} \end{cases}$; $(\forall n \in \mathbb{N})$

1. Calculer u_1 et u_2
2. Montrer par récurrence que: $\forall n \in \mathbb{N}; 1 \leq u_n \leq 2$
3. Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puis déduire qu'elle est convergente
4. Soit v_n une suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}$; $v_n = \dfrac{u_n + 1}{u_n - 2}$

(a) Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique et préciser sa raison et son premier terme puis écrire v_n en fonction de n

(b) Déduire u_n en fonction de n .puis calculer $\lim_{n \to +\infty} u_n$

Exercice 19

Considérons la fonction f définie sur $I = [0; 1]$ par : $f(x) = \dfrac{4x + 3}{3x + 4}$

1. Etudier les variations de f sur $I = [0; 1]$
2. Montrer que $f(I) \subset I$
3. Etudier la position de (C_f) avec l'axe $(\Delta) : y = x$ sur $I = [0; 1]$
4. (a) Considérons la suite numérique u_n définie par : $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$

(b) Montrer que $0 \leq u_n \leq 1$, pour tout n de $\mathbb{N}$

(c) Etudier la monotonie de (u_n)

(d) Calculer $\lim_{n \to +\infty} u_n$

Exercice 20

Soit (U_n) la suite numérique définie par: $U_0 = 2$ et $U_{n+1} = \dfrac{5U_n - 1}{U_n + 3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Et soit f la fonction numérique définie sur $I = [1; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{5x - 1}{x + 3}$$

1. Montrer que f est strictement croissante sur I et que $f(I) \subset I$

2. Montrer que $(\forall x \in I); f(x) - x = -\dfrac{(x-1)^2}{x+3}$ puis en déduire que $(\forall x \in I); f(x) \leqslant x$

3. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}); 1 < U_n$

4. Montrer que la suite (U_n) est décroissante, puis en déduire qu'elle est convergente

5. Calculer la limite de la suite (U_n)

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $V_n = \dfrac{1}{U_n - 1}$.

   a. Montrer que la suite (V_n) est arithmétique de raison $r = \dfrac{1}{4}$

   b. Exprimer V_n puis U_n en fonction de n

   c. Retrouver la limite de la suite (U_n)

Exercice 21

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par: $\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = u_n + 1 - \sqrt{1+u_n^2} \quad ; (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$

1. a. Montrer que: $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n < 1$

   b. Montrer que (u_n) est une suite décroissante ,puis déduire qu'elle est convergente

2. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + 1 - \sqrt{1+x^2}$

   a. Montrer que f est continue sur $[0,1]$ et que $f([0,1]) \subset [0,1]$

   b. Déterminer la limite de la suite (u_n)

Exercice 22

On considère la fonction f définie par: $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x}-1}$
et soit (C_f) sa courbe

1. a. Determiner D_f

   b. Etudier la dérivabilité de f à droite en 0

   c. Montrer que pour tout x de $]1;+\infty[$:$f'(x) = \dfrac{\sqrt{x}-2}{2\left(\sqrt{x}-1\right)^2}$.

   d. Donner le tableau de variations de f .

   e. Etudier la position relative de (C_f) et la droite d'équation $y = x$ sur $]1;+\infty[$

2. Considérons la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$

   a. Montrer que $4 \leq u_n$, pour tout n de $\mathbb{N}$

   b. Montrer que (u_n) est une suite décroissante

   c. En déduire que (u_n) convergente et déterminer sa limite

Exercice 23

Soit f la fonction définie sur $\left[0;+\infty\right[$ par $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

1
- (a) Montrer que: $(\forall x\in\mathbb{R}^+): f(x)\leq x$.
- (b) Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et en déduire que $f(\mathbb{R}^+)=[0;1[$.

2 On considère la suite numérique (u_n) définie par: $u_0=\frac{1}{2}$ et $u_{n+1}=f(u_n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

- (a) Montrer par récurrence que : $(\forall n\in\mathbb{N}); 0\leq u_n<4$.
- (b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante .
- (c) En déduire que la suite (u_n) est convergente puis déterminer sa limite.