Prof oulahri	Produit scalaire et suites numériques 16-12-2024

Exercice 4 :

Soient (C) l'ensemble des points $M(x; y)$ tel que : $(C) : x^2 + y^2 + 8x - 4y + 10 = 0$ et la droite $(D) : x - 2y + 13 = 0$

1) a) Montrer que (C) est un cercle et déterminer son centre K et son rayon r

b) Montrer que la droite (D) coupe le cercle (C) en deux points E et F

c) Déterminer les coordonnées de E et F

2) Soit $(D') : 3x - y + 4 = 0$ une droite

a) Montrer que la droite (D') est tangente au cercle (C) à un point H

b) Déterminer les coordonnés de H le point de tangence de (D') et (C)

3) Résoudre graphiquement le système (S) suivant ; (S): $\begin{cases} x^2 + y^2 + 8x - 4y + 10 \geq 0 \\ x - 2y + 13 \leq 0 \end{cases}$

Chapitre 5 : les suites numériques

Exercice 1 :

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on donne : $v_n = \frac{3n+14}{n+5}$

1) Calculer les trois premiers termes de (v_n)

2) Est-ce que $\frac{3}{2}$ est un terme de la suite (v_n) ?

3) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$; $\frac{14}{5} < v_n < 3$

4) Etudier la monotonie de (v_n)

Exercice 2 :

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{4} \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}{u_n}^2 + \frac{1}{2}u_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq u_n \leq 1$

Exercice 3 :

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = \frac{-5}{4} \\ u_{n+1} = (u_n + 2)^2 - 2 \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad -2 \leq u_n \leq -1$

2) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n = (u_n + 1)(u_n + 2)$

3) En déduire la monotonie de (u_n)

Exercice 4 :

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{3u_n}{21+u_n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n > 0$

2) Montrer que $u_{n+1} \leq \frac{1}{7}u_n$ pour tout n de $\mathbb{N}$

3) Montrer que la suite (u_n) est décroissante

4) Montrer par récurrence que $u_n \leq \left(\frac{1}{7}\right)^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$

Les suites

définition	Toute fonction définie de I partie de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$ appelée une suite numérique

Suite majorée	(u_n) majorée par M $\Longleftrightarrow$	$U_n \leq M$
Suite minorée	(u_n) minorée par m $\Longleftrightarrow$	$U_n \geq m$
Suite bornée	(u_n) bornée $\Longleftrightarrow$	(u_n) majorée et minorée $m \leq u_n \leq M$

Dans le cas d'une suite récurrente, on utilise le principe de récurrence pour montrer que la suite est majorée ou minorée

Suite décroissante	Suite croissante	Suite constante
$u_{n+1} - u_n \leq 0$	$u_{n+1} - u_n \geq 0$	$u_{n+1} - u_n = 0$
$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$
$u_n \leq u_{n_0}$	$u_n \geq u_{n_0}$	$u_0 = u_1 = \cdots = u_n$

	Suite géométrique	Suite arithmétique
Définition	$u_{n+1} = q \times u_n$ q appelé la raison de la suite géométrique (pratiquement en calcul $\frac{u_{n+1}}{u_n}$)	$u_{n+1} = u_n + r$ r appelé la raison de la suite arithmétique (pratiquement en calcul $u_{n+1} - u_n$)
Le terme général (l'expression u_n de en fonction de n)	$u_n = u_0 \times q^n$ $u_n = u_p \times q^{n-p}$	$u_n = u_0 + nr$ $u_n = u_p + (n-p)r$
La somme des termes successifs	$S_n = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n$ $S_n = u_p \times \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$ $\quad q \neq 1$ $S_n = (n-p+1)u_p$ $\quad q = 1$	$S_n = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n$ $S_n = \frac{(n-p+1)(u_p+u_n)}{2}$
3 termes successifs	a et b et c trois termes successifs $a \times c = b^2$	a et b et c trois termes successifs $a + c = 2b$