المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتعليم الأولي والرياضة
المركز الوطني للتقويم والامتحانات

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
المسالك الدولية
الدورة العادية 2023

NS 24F

الموضوع

SSSSSSSSSSSSSSSSSSSS-SSS

المادة	الرياضيات	مدة الإنجاز	4h
الشعبة أو المسلك	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (خيار فرنسية)	المعامل	9

<u>CONSIGNES</u> :

- La durée de l'épreuve est de 4 heures.

- L'épreuve comporte cinq exercices indépendants.

- Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat.

- L'EXERCICE1 se rapporte à l'analyse ……….………..…(7.75 pts)

- L'EXERCICE2 se rapporte à l'analyse ……….………..…(2.25 pts)

- L'EXERCICE3 se rapporte aux nombres complexes.......…(3.5 pts)

- L'EXERCICE4 se rapporte à l'arithmétique ………….......(3 pts)

- L'EXERCICE5 se rapporte aux structures algébriques......(3.5 pts)

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé

L'usage de la couleur rouge n'est pas autorisé

<u>EXERCICE1</u> :(7.75 points)

Partie I

0.5 1- a) Montrer que : $\forall t \in [0,+\infty[$; $\dfrac{4}{(2+t)^2} \leq \dfrac{1}{1+t} \leq \dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{(1+t)^2}\right)$

0.5 b) En déduire que : $\forall x \in [0,+\infty[$; $\dfrac{2x}{2+x} \leq ln(1+x) \leq \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x^2+2x}{1+x}\right)$

2- Soit g la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{ln(1+x)}{x}$$

0.5 Montrer que : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{g(x)-1}{x} = \dfrac{-1}{2}$

Partie II

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $[0,+\infty[$ par :

$$f(0)=1 \text{ et } \forall x \in]0,+\infty[\; ; \; f(x) = g(x)e^{-x}$$

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

0.5 1- Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

0.25 2- a) Montrer que f est continue à droite en 0

0.25 b) Vérifier que : $\forall x \in]0,+\infty[$; $\dfrac{f(x)-1}{x} = \left(\dfrac{e^{-x}-1}{x}\right)g(x) + \left(\dfrac{g(x)-1}{x}\right)$

0.5 c) En déduire que f est dérivable à droite en 0 et déterminer $f'_d(0)$

0.75 3- Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ puis que :

$$\forall x \in]0,+\infty[\; ; \; f'(x) = \frac{x-(1+x)^2 ln(1+x)}{x^2(1+x)}e^{-x}$$

0.5 4- a) Montrer que : $\forall x \in]0,+\infty[$; $-\dfrac{3}{2} < \dfrac{x-(1+x)^2\ln(1+x)}{x^2(1+x)} < 0$

0.25 b) En déduire que : $\forall x \in]0,+\infty[$; $-\dfrac{3}{2} < f'(x) < 0$

0.25 5- a) Dresser le tableau de variations de f

0.75 b) Construire la courbe (C) en faisant apparaître la demi-tangente à droite au point d'abscisse 0. (On prendra $\|\vec{i}\| = 2\text{cm}$)

Partie III

0.5 1- Montrer que l'équation d'inconnue x : $f(x)=3x$, admet une unique solution α dans $]0,+\infty[$

2- Soient $\beta \in \mathbb{R}^{+}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par :

$$u_0 = \beta \text{ et } \forall n \in \mathbb{N} \; ; \; u_{n+1} = \frac{1}{3} f\left(u_n\right)$$

0.5 a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \; ; \; u_n \geq 0$

0.5 b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \; ; \; \left|u_{n+1} - \alpha\right| \leq \frac{1}{2}\left|u_n - \alpha\right|$

0.5 c) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N} \; ; \; \left|u_n - \alpha\right| \leq \frac{1}{2^n}\left|\beta - \alpha\right|$

0.25 d) En déduire que la suite $\left(u_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers α

<u>EXERCICE2 :</u> (2.25 points)

On considère la fonction numérique : $x \mapsto e^x$ et soit (Γ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \{0;1;...;n\}$, on note M_k le point de la courbe (Γ) de coordonnées $\left(\frac{k}{n} \; ; \; e^{\frac{k}{n}}\right)$

0.5 1- a) Montrer que : $\forall k \in \{0;1;...;(n-1)\} \; \exists c_k \in \left]\frac{k}{n} ; \frac{k+1}{n}\right[$ tel que : $e^{\frac{k+1}{n}} - e^{\frac{k}{n}} = \frac{1}{n} e^{c_k}$

0.25 b) Montrer que : $\forall k \in \{0;1;...;(n-1)\} \; ; \quad M_k M_{k+1} = \frac{1}{n}\sqrt{1 + e^{2c_k}}$

($M_k M_{k+1}$ désigne la distance de M_k à M_{k+1})

0.5 c) En déduire que : $\forall k \in \{0;1;...;(n-1)\} \; ; \quad \frac{1}{n}\sqrt{1 + e^{\frac{2k}{n}}} \leq M_k M_{k+1} \leq \frac{1}{n}\sqrt{1 + e^{\frac{2(k+1)}{n}}}$

2- Soit $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite numérique définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^* \; ; \; S_n = \sum_{k=0}^{n-1} M_k M_{k+1}$

0.5 a) Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \; ; \quad \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{1 + e^{\frac{2k}{n}}} \leq S_n \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1 + e^{\frac{2k}{n}}}$

0.5 b) En déduire que : $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \int_0^1 \sqrt{1 + e^{2x}}\, dx$

<u>EXERCICE3</u> :(3.5 points)

On considère le nombre complexe : $u = 1 + \left(2 - \sqrt{3}\right)i$

0.5 1- a) Écrire sous forme exponentielle les nombres complexes : $1 - i$ et $1 + \sqrt{3}i$

0.25 b) Montrer que : $\frac{(1-i)\left(1+\sqrt{3}i\right)}{2\sqrt{2}} = e^{i\frac{\pi}{12}}$

0.25 c) En déduire que : $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2 - \sqrt{3}$

0.5 d) Montrer que : $u = (\sqrt{6} - \sqrt{2})e^{i\frac{\pi}{12}}$

2- On considère les deux suites numériques $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$x_0=1\ ,\quad y_0=0\quad \text{et}\quad (\forall n\in\mathbb{N})\ ;\quad \begin{cases} x_{n+1}=x_n-\left(2-\sqrt{3}\right)y_n \\ y_{n+1}=\left(2-\sqrt{3}\right)x_n+y_n \end{cases}$$

0.5 a) Montrer par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $x_n+iy_n=u^n$

0.5 b) En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $x_n=\dfrac{\cos\left(\frac{n\pi}{12}\right)}{\left(\cos\frac{\pi}{12}\right)^n}$ et $y_n=\dfrac{\sin\left(\frac{n\pi}{12}\right)}{\left(\cos\frac{\pi}{12}\right)^n}$

3- Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$

Pour tout entier naturel n, on note A_n le point d'affixe u^n

0.5 a) Déterminer les entiers n pour lesquels les points O, A_0 et A_n sont alignés.

0.5 b) Montrer que pour tout entier n , le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_n

<u>EXERCICE4</u> :(3 points)

Soit p **un nombre premier impair**. On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation (E): $x^2\equiv 2\ [p]$

0.25 1- a) Montrer que : $2^{p-1}\equiv 1\quad [p]$

0.25 b) En déduire que : $2^{\frac{p-1}{2}}\equiv 1\quad [p]$ ou $2^{\frac{p-1}{2}}\equiv -1\quad [p]$

(On remarque que : $(2^{\frac{p-1}{2}}-1)(2^{\frac{p-1}{2}}+1)=2^{p-1}-1$)

2- Soit x une solution de l'équation (E)

0.5 a) Montrer que p et x sont premiers entre eux.

0.5 b) En déduire que : $2^{\frac{p-1}{2}}\equiv 1\ [p]$ (On pourra utiliser le théorème de Fermat)

0.25 3- Montrer que pour tout $k\in\{1,2,...,p-1\}$, p divise C_p^k

(On rappelle que : $(\forall k\in\{1,2,...,p-1\})$ $C_p^k=\dfrac{p!}{k!(p-k)!}$ et que : $kC_p^k=pC_{p-1}^{k-1}$)

0.25 4-a) En utilisant la formule de Moivre, montrer que :

$$(1+i)^p=2^{\frac{p}{2}}\cos\left(p\frac{\pi}{4}\right)+i\,2^{\frac{p}{2}}\sin\left(p\frac{\pi}{4}\right)$$

(i étant le nombre complexe tel que : $i^2=-1$)

0.5 b) On admet que : $(1+i)^p=\sum_{k=0}^{k=\frac{p-1}{2}}(-1)^kC_p^{2k}+i\sum_{k=0}^{k=\frac{p-1}{2}}(-1)^kC_p^{2k+1}$

Montrer que : $2^{\frac{p}{2}}\cos\left(p\frac{\pi}{4}\right)\in\mathbb{Z}$ et $2^{\frac{p}{2}}\cos\left(p\frac{\pi}{4}\right)\equiv 1\ [p]$ (on pourra utiliser la question3-)

0.5 5- En déduire que si $p\equiv 5\ [8]$ alors l'équation (E) n'admet pas de solution dans $\mathbb{Z}$

<u>EXERCICE5</u> : (3.5 points)

On rappelle que $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau non commutatif de zéro la matrice $O=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ et d'unité la matrice $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, et que $(M_2(\mathbb{R}),+,.)$ est un espace vectoriel réel.

On considère l'ensemble $E=\left\{M(x,y)=\begin{pmatrix}x+y&y\\2y&x-y\end{pmatrix} / (x,y)\in\mathbb{R}^2\right\}$

Partie I :

0.5 1- Montrer que E est un sous-groupe de $(M_2(\mathbb{R}),+)$

0.25 2- Montrer que E est un sous- espace vectoriel de $(M_2(\mathbb{R}),+,.)$

0.25 3- a) Vérifier que : $\forall(x,y,x',y')\in\mathbb{R}^4$; $M(x,y)\times M(x',y')=M(xx'+3yy',xy'+yx')$

0.5 b) En déduire que $(E,+,\times)$ est un anneau commutatif et unitaire.

0.25 4- a) Vérifier que : $M(\sqrt{3},1)\times M(-\sqrt{3},1)=O$

0.25 b) En déduire que $(E,+,\times)$ n'est pas un corps.

Partie II :

Soient $F=\left\{x+y\sqrt{3} \;/\; (x,y)\in\mathbb{Q}^2\right\}$ et $G=\left\{M(x,y)=\begin{pmatrix}x+y&y\\2y&x-y\end{pmatrix} / (x,y)\in\mathbb{Q}^2\right\}$

0.25 1- Montrer que : $\forall(x,y)\in\mathbb{Q}^2$; $x+y\sqrt{3}=0$ si et seulement si $(x=0$ et $y=0)$

0.25 2- Montrer que $F-\{0\}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}^*,\times)$

3- Soit φ l'application définie de $F-\{0\}$ vers E par :

$$\forall(x,y)\in\mathbb{Q}^2-\{(0,0)\} \;;\; \varphi(x+y\sqrt{3})=M(x,y)$$

0.25 a) Vérifier que : $\varphi(F-\{0\})=G-\{O\}$

0.25 b) Montrer que φ est un homomorphisme de $(F-\{0\},\times)$ vers $(E,\times)$

0.25 c) En déduire que $(G-\{O\},\times)$ est un groupe commutatif.

0.25 4- Montrer que $(G,+,\times)$ est un corps commutatif.

FIN

FONCTIONS EXPONENTIELLES

JUIN 2004

(I) soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{x}$

1) calculer les limites de f aux bornes de $\mathbb{R}^*$

2) étudier le sens de variation de f

3) a) étudier les branches infinies de la courbe (C_f)

b) tracer la courbe (C_f)

(II) soit $(U_n)_n$ la suite définie par : $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = U_n^2 f(U_n) = U_n e^{-U_n}$

1) prouver que $(\forall x > 0)$: $e^x \geq x + 1$

2) en déduire que $(\forall x > 0)$ $x^2 f(x) \leq \dfrac{x}{x+1}$

3) a) montrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N})$ $0 < \mathrm{U_n} < \dfrac{1}{n+1}$

b) montrer que $(U_n)_n$ est convergente et déterminer sa limite

4) on pose $V_n = \sum_{k=0}^{k=n-1} U_k$ pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$.

a) prouver que $V_n = \ln\left(\dfrac{1}{U_n}\right)$

b) déterminer la limite de la suite $(V_n)_n$

JUIN 2005

(I) on considère la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = (x+2)e^{\frac{-2}{x}} & x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1) a) montrer que f est continue à droite de 0

b) étudier la dérivabilité de f à droite de 0

c) montrer que f est strictement croissante sur $[0,+\infty[$

2) a) calculer la limite $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

b) montrer que $(\forall t \geq 0)$: $0 \leq e^{-t} + t - 1 \leq \dfrac{t^2}{2}$

c) montrer que $(\forall x > 0)$: $-\dfrac{4}{x} \leq f(x) - x \leq \dfrac{4}{x^2} - \dfrac{2}{x}$

d) déduire la branche infinie de (C_f) en $+\infty$

3) tracer la courbe (C_f)

(II) soit n un entier naturel non nul .

on considère la fonction f_n définie sur $[0,+\infty[$ par : $\begin{cases} f_n(x) = \left(x+\dfrac{2}{n}\right)e^{\frac{-2}{x}} & x>0 \\ f_n(0)=0 \end{cases}$

1) montrer que f_n est dérivable à droite de 0

2) étudier le sens de variation de f_n sur $[0,+\infty[$

3) a) montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$ l'équation $f_n(x) = \dfrac{2}{n}$ admet une unique solution a_n dans $]0,+\infty[$

b) montrer que $(\forall x>0)\ (\forall n \in \mathbb{N}^*)\ f_{n+1}(x) - \dfrac{2}{x+1} > f_n(x) - \dfrac{2}{n}$

c) en déduire que $(a_n)_n$ est décroissante puis qu'elle est convergente . on pose $a = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$

d) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\quad na_n = 2e^{\frac{2}{a_n}} - 2$ et prouver que $a=0$

JUILLET 2006

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

On considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = \dfrac{x}{n} - e^{-nx}$

1) a) calculer les limites $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$

b) étudier les branches infinies de la courbe (C_n)

2) calculer la dérivée $f_n'(x)$ puis dresser le tableau des variations de la fonction f_n

3) a) montrer que l'équation $f_n(x)=0$ admet dans $\mathbb{R}$ une seule solution α_n

b) montrer que $f_n\left(\dfrac{1}{n}\right) < 0$

c) montrer que $(\forall x \in \mathbb{R})$: $e^x \geq x+1$ en déduire que $f_n(1) > 0$

d) montrer que $\dfrac{1}{n} < \alpha_n < 1$

4) tracer la courbe (C_2) $\left(\text{on donne } \alpha_2 \simeq 0{,}6\right)$

5) a) montrer que $(\forall n \geq 2)\quad f_{n+1}(\alpha_n) = \dfrac{ne^{-(n+1)\alpha_n}}{(n+1)}\left(e^{\alpha_n} - \dfrac{1}{n} - 1\right)$

b) en déduire que $(\forall n \geq 2)$: $f_{n+1}(\alpha_n) \geq 0$

c) montrer que la suite $(\alpha_n)_n$ est décroissante et qu'elle est convergente

6) a) montrer que $(\forall n \geq 2)$: $\frac{1}{n^2} < e^{-n\alpha_n} < \frac{1}{n}$

b) en déduire que $(\forall n \geq 2)$: $\frac{\ln(n)}{n} < \alpha_n < 2\,\frac{\ln(n)}{n}$ puis calculer $\lim_{n\to+\infty} \alpha_n$

JUIN 2010

(I) on considère la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par : $f(x) = 4xe^{-x^2}$

1) calculer la limite $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

2) étudier le sens de variation de f puis dresser le tableau des variations

3) déterminer l'équation du demi-tangente à la courbe (C_f) en 0 et tracer (C_f)

(II) soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2

On considère la fonction f_n définie sur $[0,+\infty[$ par : $f(x) = 4\,x^n\,e^{-x^2}$

1) a) montrer que $(\forall x > 1)$ $e^{-x^2} < e^{-x}$

b) en déduire $\lim_{x\to+\infty} f_n(x)$

2) étudier le sens de variation de f_n puis dresser le tableau des variations

3) montrer que : $(\exists! u_n \in]0,1[)$ $f_n(u_n) = 1$

4) a) vérifier que $(\forall n \geq 2)$ $f_{n+1}(u_n) = u_n$

b) montrer que $(u_n)_n$ est croissante et convergente

5) on pose $l = \lim_{n\to+\infty} u_n$

a) montrer que $0 \leq l \leq 1$

b) montrer que $(\forall n \geq 2)$ $-\frac{\ln 4}{n} < u_n < \frac{1-\ln 4}{n}$ en déduire la valeur de l

JUIN 2012

Soit n un entier naturel non nul . on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + \frac{e^{-x}}{n}$

1) calculer les limites $\lim_{x\to+\infty} f_n(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} f_n(x)$

2) a) étudier la branche infinie de la courbe (C_n) au voisinage de $-\infty$

b) montrer que la droite (D) $y = x$ est une asymptote oblique à (C_n) en $+\infty$, déterminer la position de (C_n) par rapport à (D)

3) étudier le sens de variation de f_n puis donner le tableau des variations

4) tracer la courbe (C_3) (on donne $f_3(-1,5) \simeq 0$; $f_3(-0,6) \simeq 0$; $\ln 3 \simeq 1,1$)

5) a) montrer que si $n \geq 3$ alors $\frac{e}{n} < \ln n$

b) montrer que si $n \geq 3$ alors $f_n(x) = 0$ admet exactement deux solutions x_n et y_n telles que $x_n \leq -\ln n$ et $\frac{-e}{n} \leq y_n \leq 0$

c) calculer les limites $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n$

6) soit g la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $g(x) = -1 - x\ln x$; $x > 0$ et $g(0) = -1$

a) montrer que g est continue à droite de 0

b) vérifier que $(\forall n \geq 3)$ $g\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{\ln n}{x_n}$ en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{x_n}$

EXERCICE

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $f(x) = 2e^{-x} - e^{-2x}$

1)a) calculer la limite $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ que put-on déduire ?

b) étudier les variations de f puis dresser le tableau des variations

2) montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution α et que $\frac{1}{2} < \alpha < 1$

3) a) montrer que $(\forall x \in [0,1])$ $0 \leq x - x^2 \leq \frac{1}{4}$

b) en déduire que $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$ $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

4) soit $(U_n)_n$ la suite définie par : $U_0 = \frac{1}{2}$ et $U_{n+1} = f(U_n)$

a) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$ $\frac{1}{2} \leq U_n \leq 1$

b) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$ $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|U_n - \alpha|$

c) en déduire que $(U_n)_n$ est convergente et déterminer sa limite