Dans tout ce qui suit, Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

Exercice 01 :

Déterminer les branches infinies de la courbe (Cf) d'une fonction f dans les cas suivants :

$$f(x)=x+\frac{1}{x^2+1}\quad;\quad f(x)=\sqrt{x+1}\quad;$$
$$f(x)=x+\sqrt{x^2+x+1}\quad;\ f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

Exercice 02 :

Déterminer les branches infinies de la courbe (Cf) d'une fonction f dans les cas suivants :

$$f(x)=x\sqrt{x-2}\quad;\quad f(x)=\sqrt{x+2}-x\quad;$$
$$\begin{cases} f(x)=x^2+x & si\quad x\le 0\\ f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+x}} & si\quad x>0\end{cases}$$

Exercice 03 :

Etudier la convexité de la courbe représentative de la fonction f dans les cas suivants :

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+1\quad;\ f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$$
$$;\ f(x)=\frac{x^2+x+3}{x+2}$$

Exercice 04 :

Etudier la convexité de la courbe représentative de la fonction f dans les cas suivants :

$$f(x)=\sqrt{2x-2}+x\quad;\ f(x)=16\sqrt{x-1}+x^2\quad;$$
$$f(x)=x+\frac{1}{x^2+1}\quad;\ f(x)=-\frac{1}{2}\sqrt{x+1}-\frac{2}{\sqrt{x+1}}$$

Exercice 05 :

Etudier la convexité de la courbe représentative de la fonction f et déterminer les points d'inflexion (s'ils existent) dans les cas suivants :

$$f(x)=\frac{x}{3x^2+3}\quad;\ f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-4x+1\quad;$$
$$f(x)=(x-1)\sqrt{x-1}$$

Exercice 06 :

Déterminer le centre de symétrie de la courbe représentative de la fonction f dans les cas suivants:

a. $f(x)=4x^3+x^5$; **b.** $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+7}-1}{x^3+x}$

Exercice 07 :

Vérifier que le point I est un centre de symétrie de la courbe de f dans les cas suivants:

a) $f(x)=x^3-3x+2$ et $I(0;2)$

b) $f(x)=\dfrac{5x+1}{1-2x}$ et $I\left(\dfrac{1}{2};-\dfrac{5}{2}\right)$

c) $f(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$ et $I(-1;-2)$

Exercice 08 :

Déterminer l'axe de symétrie de la courbe représentative de la fonction f dans les cas suivants:

a. $f(x)=x^2-4x+1$; **b.** $f(x)=x^4+\sqrt{x^2+1}$;

c. $f(x)=\dfrac{2}{x^2+3x-4}$

Exercice 09 :

Soit f une fonction définie par : $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+2-x^2}$

a. Déterminer le point d'inflexion de la courbe représentative de f

b. Montrer que ce point est un centre de symétrie de la courbe représentative de f

Exercice 10 :

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\sqrt{x^2-1}-x-3$

Et soit (Cf) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

1. Déterminer Df , l'ensemble de définition de f
2. Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$
3. Etudier les branches infinies de la courbe (Cf)
4. Etudier la dérivabilité de f à droite de 1 et à gauche de -1 .Puis donner des interprétations graphique aux résultats.
5. Calculer $f'(x)$ pour tout x de $Df\setminus\{-1;1\}$. puis dresser le tableau de variation de f
6. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une seule solution α telle que $-2<\alpha<-\dfrac{3}{2}$
7. Construire la courbe (Cf) (l'unité est $1\,cm$)
8. Montrer que la restriction g de la fonction f sur l'intervalle $]-\infty;-1[$, admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera

Exercice 01

Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes :

$f_1(x)=\dfrac{x-1}{2x^2+x-1}$; $f_2(x)=\dfrac{x^2+7x}{4|x|-3}$; $f_3(x)=\sqrt{\dfrac{2-x}{x^2-6x+5}}$; $f_4(x)=\dfrac{\tan x}{1+\cos x}$

$f_5(x)=\sqrt{3|x|-2}$; $f_6(x)=\dfrac{\cos x}{2+\sin x-\sin^2 x}$; $f_7(x)=\dfrac{|x|-\cos x}{2x^3-7x^2+6x-1}$

$f_8(x)=\dfrac{5-\cos x}{\sin x+\cos x+2}$; $f_9(x)=\sqrt{x^3-8}+\dfrac{1-x}{|x+1|-|x-7|}$; $f_{10}(x)=\dfrac{\sqrt{3-x^2}}{\sqrt{1+x^3}}$

$f_{11}(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2-3x+2} & si\quad x\geqslant 0\\ \dfrac{5-x}{x^2+7x} & si\quad x<0\end{cases}$; $f_{12}(x)=\begin{cases}\dfrac{x+2}{\sin(x).\cos(x)} & si\quad x\in[0;\pi]\\ \dfrac{-1}{(1+2\sin x)\left(\sqrt{3}-2\cos x\right)} & si\quad x\in[-\pi;0[\end{cases}$

Exercice 02

Étudier la parité de chacune des fonctions suivantes :

$f(x)=\dfrac{x^3}{|x|+4}$; $g(x)=\dfrac{\cos x}{x^4-x^2+1}$; $h(x)=\dfrac{\sin x}{x^3-1}$; $k(x)=|x|+|x+1|+|x-1|$

$u(x)=\dfrac{\sqrt{|x-2|}+\sqrt{|x+2|}}{x^4-1}$; $v(x)=\sqrt{x^2-3x+5}-\sqrt{x^2+3x+5}$; $w(x)=\dfrac{\tan^3 x+\tan x}{2-\cos x}$

Exercice 03

Pour chacune des fonctions numériques suivantes, donner le tableau de variations puis tracer la courbe représentative dans un repère orthonormé :

$f(x)=x^2+4x+1$; $g(x)=-2x^2+6x-1$; $h(x)=\dfrac{3x-1}{x-2}$; $k(x)=\dfrac{x}{x+2}$; $p(x)=-\dfrac{x^3}{2}$

$q(x)=\dfrac{x^3}{4}$; $u(x)=\sqrt{x-2}$; $v(x)=2|x|+1$; $a(x)=-x^2+2|x|+3$; $b(x)=\dfrac{3x}{|x|+1}$

Exercice 04

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x)=\dfrac{\sqrt{2x+5}-3}{x-2}$.

① Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f.

② Étudier le signe de la fonction f sur D_f.

③ a) Montrer que la fonction f est majorée par $\dfrac{2}{3}$. Le nombre $\dfrac{2}{3}$ est-il la valeur maximale absolue de f ?

b) En déduire que la fonction f est bornée sur D_f.

Exercice 05

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x)=\dfrac{2x^2+11x+16}{x^2+5x+7}$.

① Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f .

② Montrer que 1 est la valeur minimale absolue de la fonction f .

③ Montrer que $\dfrac{7}{3}$ est la valeur maximale absolue de la fonction f .

Exercice 06

Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $I=]1\,;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x}-1}$.

① a) Montrer que la fonction f est minorée par 4 sur l'intervalle I .

b) le nombre 4 est-il la valeur minimale de la fonction f ? Justifier la réponse.

② Montrer que la fonction f n'est pas majorée sur I .

Exercice 07

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}$.

① Étudier la parité de la fonction f .

② Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R})\;\; |f(x)|\leqslant 1$.

③ Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $g(x)=x-\sqrt{x^2-x+1}$.

a) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}^+$: $g(x)<\dfrac{1}{2}$

b) Montrer que la fonction g est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

④ a) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}^+$: $f(x)=\sqrt{2g(x^2+1)}$.

b) En déduire que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ puis dresser son tableau de variations sur $\mathbb{R}$.

Exercice 08

On considère les fonctions numériques f et g définies par : $f(x)=\dfrac{1}{3}(x^2-2x)$ et $g(x)=\sqrt{x-2}$.

Soit $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ les courbes représentatives de f et g respectivement dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

① Montrer que les courbes $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ sont sécantes aux points $A(2\,;0)$ et $B(3\,;1)$.

② Construire les courbes $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$.

③ Déterminer graphiquement $g([2\,;3])$ et $g([3\,;+\infty[)$.

④ Soit h la fonction numérique définie par : $h(x)=f\circ g(x)$.

a) Déterminer D_h l'ensemble de définition de la fonction h .

b) Étudier les variations de la fonction h .

Exercice 09

Soit la fonction numérique f définie sur l'intervalle $I=[4;24]$ par : $f(x)=\sqrt{x-4}+\sqrt{24-x}$.

① Montrer que pour tout $x\in I$: $(28-x)\in I$ et $f(28-x)=f(x)$.

② a) Étudier la monotonie de la fonction f sur l'intervalle $[4;14]$.

b) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle I.

c) En déduire une comparaison des nombres : $\sqrt{3}+\sqrt{17}$; $\sqrt{2}+\sqrt{18}$; $\sqrt{5}+\sqrt{15}$

Exercice 10

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+1}{2}}+\sqrt{\dfrac{2}{x+1}}$.

① Déterminer D l'ensemble de définition de la fonction f.

② Montrer que la fonction f est minorée par 2.

③ On considère la fonction g définie sur D par : $g(x)=(f(x))^2$.

a) Montrer que pour tous éléments distincts a et b de D : $\dfrac{g(a)-g(b)}{a-b}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{2}{(a+1)(b+1)}$.

b) Étudier les variations de la fonction g sur chacun des intervalles $]-1;1]$ et $[1;+\infty[$.

c) En déduire les variations de la fonction f.

Exercice 11

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x)=\sqrt{x^2+2x}-x$.

① Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f.

② a) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}^+$: $0\leqslant f(x)<1$.

b) Montrer que pour tout $x\in\,]-\infty;-2]$: $f(x)\geqslant 2$.

③ a) Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$ et décroissante sur $]-\infty;-2]$.

b) Dresser le tableau de variations de la fonction f.

Exercice 12

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x)=\dfrac{|x|}{\sqrt{4-x^2}}$.

① Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f puis étudier sa parité.

② Soit a et b deux éléments de l'ensemble D_f.

a) Calculer $(f(a))^2-(f(b))^2$.

b) En déduire la monotonie de la fonction f sur chacun des intervalles $[0;2[$ et $]-2;0]$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f.

③ Montrer par l'absurde que la fonction f n'est pas majorée sur D_f.

Exercice 13

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x) = 3x + 8 - 6\sqrt{x-1}$.

① Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f .

② Montrer que le nombre 8 est la valeur minimale absolue de la fonction f .

③ Soit g la fonction numérique définie par : $g(x) = \sqrt{x-1}$

a) Construire la courbe $(\mathcal{C}_g)$ de la fonction g dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

b) Déterminer graphiquement $g([1;2])$ et $g([2;+\infty[)$.

c) Déterminer le polynôme h de deuxième degré tel que : $(\forall x \in [1;+\infty[)\quad f(x) = h \circ g(x)$.

d) En déduire les variations de la fonction f sur D_f .

Exercice 14

On considère la fonction numérique g définie par : $g(x) = x\sqrt{\dfrac{x}{x+2}}$.

① Déterminer D_g l'ensemble de définition de la fonction g .

② On considère le polynôme P définie sur $\mathbb{R}$ par : $P(x) = x^3 - 27x - 54$.

Vérifier que le nombre -3 est une racine du polynôme P puis étudier le signe de $P(x)$ sur $\mathbb{R}$.

③ Montrer que pour tout $x \in]-\infty;-2[$: $g(x) \leqslant -3\sqrt{3}$

④ a) Montrer que la fonction g est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

b) La fonction g est-elle monotone sur l'intervalle $]-\infty;-2[$? Justifier la réponse.

Exercice 15

Soit f et g les fonctions numériques définies par : $f(x) = -\dfrac{1}{2}x^2 + 2x - 1$ et $g(x) = \dfrac{2x-1}{x+1}$.

On note $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

① Dresser les tableaux de variations des fonctions f et g .

② Montrer que 1 est la valeur maximale absolue de la fonction f .

③ Construire la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

④ Déterminer graphiquement : $f(\mathbb{R}_-^*)$; $f(]0;2])$; $f([2;4[)$; $f([4;+\infty[)$.

⑤ Soit h la fonction numérique définie par : $h(x) = g \circ f(x)$.

a) Déterminer D_h l'ensemble de définition de la fonction h .

b) Exprimer $h(x)$ en fonction de x .

c) Étudier la monotonie de la fonction h sur chacun des intervalles $\mathbb{R}_-^*$, $]0;2]$, $[2;4[$ et $[4;+\infty[$.

puis dresser le tableau de variations de la fonction h .

Exercice 16

Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0;1[$ par : $f(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{1-x}\right)$.

① Montrer que pour tout $x\in\,]0;1[$: $f(x)=1-\dfrac{2}{x^2-x}$

② Soit x et y deux éléments distincts de l'intervalle $]0;1[$.

a) Montrer que : $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}=\dfrac{2(x+y-1)}{(x^2-x)(y^2-y)}$.

b) Étudier la monotonie de la fonction f sur chacun des intervalles $\left]0;\dfrac{1}{2}\right]$ et $\left[\dfrac{1}{2};1\right[$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f.

③ Soit α et β deux réels strictement positifs tels que : $\alpha+\beta=1$.

Déduire de ce qui précède que : $\left(1+\dfrac{1}{\alpha}\right)\left(1+\dfrac{1}{\beta}\right)\geqslant 9$.

Exercice 17

Soit a un réel strictement positif ; α et β deux réels de l'intervalle $]1;+\infty[$.

On considère les fonctions numériques f et g définies sur l'intervalle $I=\,]a;+\infty[$ telles que :

- Pour tout $x\in I$: $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$;
- La fonction g est croissante sur l'intervalle I.

① Montrer que pour tout $(x;y)\in I^2$: $\alpha x\in I$ et $\alpha x+\beta y\in I$.

② Montrer que pour tout $(x;y)\in I^2$: $\dfrac{f(\alpha x+\beta y)}{\alpha x+\beta y}\geqslant \max\left(\dfrac{f(x)}{x};\dfrac{f(y)}{y}\right)$.

③ En déduire que pour tout $(x;y)\in I^2$: $f(\alpha x+\beta y)\geqslant \alpha f(x)+\beta f(y)$.

Exercice 18

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x)=x-2\sqrt{x-2}+1$.

① Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f.

② Montrer que la fonction f est minorée par le nombre 2.

③ Soit h la fonction numérique définie par : $h(x)=\sqrt{x-2}$.

a) Dresser le tableau de variations de la fonction h puis tracer la courbe $(\mathcal{C}_h)$ dans un repère orthonormé.

b) Déterminer $h([2;3])$ et $h([3;+\infty[)$.

④ a) Déterminer un polynôme du second degré g tel que : $(\forall x\in D_f)\ f(x)=g\circ h(x)$.

b) En déduire les variations de la fonction f.

c) Dresser le tableau de variations de la fonction $\dfrac{1}{f}$.

Exercice 19

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x) = \dfrac{x - E(x)}{\sqrt{x}}$.

① Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f .

② Montrer que la fonction f est bornée sur D_f .

Exercice 20

Soit f une fonction numérique définie sur $[-6\,;6]$ et dont le tableau de variations est comme suit :

x	-6	-3	0	1	5	6
$f(x)$	3	2	7	0	-2	-1

À partir du tableau de variations de la fonction f , déterminer le tableau de variations de la fonction numérique g définie dans chacun des cas suivants :

① $g(x) = 2f(x) - 3$; ② $g(x) = -f(x) + 4$; ③ $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$

④ $g(x) = (f(x))^2 - 1$; ⑤ $g(x) = \dfrac{2f(x) - 3}{f(x) + 4}$; ⑥ $g(x) = 2(f(x))^3$

⑦ $g(x) = \sqrt{f(x) + 3}$; ⑧ $g(x) = f(x)(f(x) + 4)$; ⑨ $g(x) = -\dfrac{(f(x))^3}{5}$

Exercice 21

Soit f une fonction numérique définie de $I = [0;1]$ vers I telle que :

$$(\forall\, (x;y) \in I^2) \quad f(f(x) + y) = f(x) + f(y) \qquad \circledast$$

On pose : $\alpha = f(0)$.

① Montrer que si $\alpha = 0$, alors : $(\forall x \in I)\ f \circ f(x) = f(x)$.

② Montrer que si $\alpha \neq 0$, alors : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ \underbrace{(f \circ f \circ \ldots \circ f)}_{n\ fois}(\alpha) = (n+1)\alpha$.

③ En déduire que la proposition « $f(0) \neq 0$ » est fausse puis que : $(\forall x \in I)\ f \circ f(x) = f(x)$.

④ Soit g la fonction numérique définie sur I par :

$$\begin{cases} g(x) = 0 & si\ \ 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{2} \\ g(x) = 1 & si\ \ \dfrac{1}{2} < x \leqslant 1 \end{cases}$$

Justifier que la fonction g ne vérifie pas la relation $\circledast$.

Exercice 22

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \sqrt{4-x^2} - |x|$.

① Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f puis étudier sa parité.

② Étudier le signe de la fonction f sur D_f .

③ Montrer que la fonction f est strictement décroissante sur $[0\,;2]$ puis dresser son tableau de variations.

Exercice 23

On considère la fonction numérique f définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{1}{x}(x+\alpha)^3$ où $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

① Vérifier que pour tout $x \in \,]0\,;+\infty[$: $f(x) = x^2 + 3\alpha x + 3\alpha^2 + \dfrac{\alpha^3}{x}$

② Soit x et y deux réels strictement positifs et distincts.

a) Montrer que : $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} = x+y+3\alpha - \dfrac{\alpha^3}{xy}$.

b) Étudier la monotonie de la fonction f sur chacun des intervalles $\left]0\,;\dfrac{\alpha}{2}\right]$ et $\left[\dfrac{\alpha}{2}\,;+\infty\right[$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f .

③ **Application :** Soit a , b et c des réels strictement positifs.

Montrer que : $\left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^3 \geqslant \dfrac{1}{4}a(b+c)^2$. (Indication : On pourra poser : $\alpha = b+c$)

Exercice 24

On considère la fonction numérique g définie sur $I = [-1\,;+\infty[$ par : $g(x) = 4\left(x - 3\sqrt{x+1}+1\right)$.

① Vérifier que pour tout $x \in I$: $g(x) = \left(2\sqrt{x+1}-3\right)^2 - 9$

② Étudier le signe de la fonction g sur I .

③ Montrer que la fonction g est croissante sur l'intervalle $\left[\dfrac{5}{4}\,;+\infty\right[$ et décroissante sur $\left[-1\,;\dfrac{5}{4}\right]$.

Exercice 25

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^3+x-2}}$.

① Justifier que : $D_f = \,]1\,;+\infty[$.

② Vérifier que pour tout $x \in D_f$: $\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)^2 = x^2 - \dfrac{2}{x} + 1$.

③ Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $g(x) = x^2 - \dfrac{2}{x} + 1$.

Montrer que la fonction g est strictement croissante sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$.

④ En déduire la monotonie de la fonction f sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$.

Exercice 26

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{x}{x^2+x+1}$.

① Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R})\ \ -1\leqslant f(x)\leqslant\dfrac{1}{3}$.

② a) Montrer que pour deux réels distincts x et y : $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}=\dfrac{1-xy}{(1+x+x^2)(1+y+y^2)}$.

b) En déduire la monotonie de la fonction f sur chacun des intervalles $[-1;1]$ et $[1;+\infty[$.

③ Soit g et h les fonctions numériques définies par : $g(x)=\sqrt{x+1}$ et $h(x)=\dfrac{|x+1|}{\sqrt{x^2+x+1}}$.

a) Déterminer les variations de la fonction g sur son ensemble de définition.

b) Vérifier que pour tout $x\in\mathbb{R}$: $h(x)=g\circ f(x)$.

c) En déduire la monotonie de la fonction h sur chacun des intervalles $[-1;1]$ et $[1;+\infty[$.

Exercice 27

On considère les fonctions numériques f et g définies par : $f(x)=\sqrt{x+4}$ et $g(x)=\dfrac{2}{x+1}$.

Soit $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ les courbes représentatives de f et g respectivement dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

① Déterminer D_f et D_g ensembles de définition respectifs des fonctions f et g.

② Montrer que $A(0;2)$ est un point d'intersection des courbes $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$.

③ Construire les courbes $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

④ Résoudre graphiquement l'inéquation : $f(x)\geqslant g(x)$.

⑤ On considère la fonction numérique h définie par : $h(x)=\sqrt{\dfrac{4x+6}{x+1}}$

a) Déterminer D_h ensemble de définition de la fonction h.

b) Étudier les variations de la fonction h sur l'intervalle $\left]-\infty;-\dfrac{3}{2}\right]$.

Exercice 28

On considère les fonctions numériques f et g définies par : $f(x)=\sqrt{x+2}$ et $g(x)=\dfrac{3x}{2x-1}$.

Soit $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ les courbes représentatives de f et g respectivement dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

① Déterminer D_f et D_g.

② Montrer que $A(-1;1)$ et $B(2;2)$ sont des points aux courbes $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$.

③ Dresser les tableaux de variations des fonctions f et g.

④ Construire les courbes $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

⑤ Résoudre graphiquement les inéquations : $\sqrt{x+2}-\dfrac{3x}{2x-1}<0$ et $\dfrac{3x\sqrt{x+2}}{2x-1}\leqslant 0$.

⑥ On considère la fonction numérique h définie par : $h(x)=\dfrac{3\sqrt{x+2}}{2\sqrt{x+2}-1}$

a) Vérifier que l'ensemble de définition de la fonction h est : $D_h=\left[-2\,;-\dfrac{7}{4}\right[\cup\left]-\dfrac{7}{4};+\infty\right[$

et que pour tout $x\in D_h$: $h(x)=g\circ f(x)$.

b) Déterminer graphiquement $f\left(\left[-2\,;-\dfrac{7}{4}\right[\right)$ et $f\left(\left]-\dfrac{7}{4};+\infty\right[\right)$.

c) En utilisant la monotonie des fonctions f et g, déterminer la monotonie de la fonction h sur chacun des intervalles $\left[-2\,;-\dfrac{7}{4}\right[$ et $\left]-\dfrac{7}{4};+\infty\right[$ puis dresser le tableau de variations de la fonction h.

d) Déterminer la valeur maximale de la fonction h sur l'intervalle $\left[-2\,;-\dfrac{7}{4}\right[$.

e) Montrer que pour tout $x\in\left]-\dfrac{7}{4};+\infty\right[$: $h(x)>\dfrac{3}{2}$.

Exercice 29

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+\cos x}+\sqrt{1-\cos x}}{\sin(2x)}$.

① Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f puis étudier sa parité.

② Montrer que la fonction f est périodique de période π.

Exercice 30

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^3+3x^2+3x+5$.

① Montrer que pour tous réels distincts x et y : $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}=\left(x+\dfrac{y+3}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}(y+1)^2$.

② En déduire que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

③ En écrivant f comme composée de deux fonctions, retrouver le résultat de la question ②.

Exercice 31

On considère dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : (E) : $x^3+2\sqrt{x+2}=0$.

① En utilisant deux fonctions usuelles, montrer graphiquement que l'équation (E) admet une solution unique α telle que : $-\dfrac{3}{2}<\alpha<-1$.

② En déduire, en fonction de α, l'ensemble solution de l'inéquation : $-\dfrac{1}{x^3}<2\sqrt{\dfrac{1+2x}{x}}$

Exercice 32

Soit f une fonction numérique définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^*$ telle que : $(\forall\ (a;b) \in \mathbb{R}^2) \quad f(a-b) = f(a) \times f(b)$.

Montrer que la fonction f est constante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 33

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 3x$.

Soit $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

① Montrer que pour tous réels distincts x et y : $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} = x^2 + xy + y^2 - 3$.

② Étudier la monotonie de la fonction f sur chacun des intervalles $[1\,;\,+\infty[$ et $[-1\,;\,1]$ et $]-\infty;\,-1]$.

③ Déterminer l'intersection de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ avec les axes du repère.

④ On considère les fonctions numériques g , h et k définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = |x|^3 - 3|x| \qquad ; \qquad h(x) = \frac{x^3 - 3x}{5} + 2 \qquad ; \qquad k(x) = |x^3 - 3x|$$

Dresser, avec justification, les tableaux des variations des fonctions g , h et k .

⑤ Soit p et q les fonctions numériques définies par : $p(x) = x\sqrt{x} - 3\sqrt{x}$ et $q(x) = \dfrac{1}{x^3 - 3x}$.

a) Déterminer l'ensemble de définition de chacun des fonctions p et q .

b) En écrivant p et q comme composée de deux fonctions, étudier la monotonie des fonctions p et q .

Exercice 34

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{2 - |x|} & si \quad |x| \leqslant 2 \\ f(x) = \dfrac{-2|x| + 4}{|x| + 1} & si \quad |x| > 2 \end{cases}$$

On note $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

① Montrer que la fonction f est paire que le point $A(2\,;0)$ appartient à la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

② Étudier la monotonie de la fonction f sur $\mathbb{R}^+$ puis dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

③ a) Montrer que la fonction f est minorée par le nombre -2 sur $\mathbb{R}$.

Le nombre -2 est-il la valeur minimale de la fonction f sur $\mathbb{R}$? Justifier la réponse.

b) Montrer que la fonction f est majorée sur $\mathbb{R}$.

④ Construire la courbe $(\mathcal{C}_f)$ dans le repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

Exercice 35

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \dfrac{-2|x| + 1}{|x| - 2}$.

On note $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$.

① Vérifier que la courbe $(\mathcal{C}_f)$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

② Étudier la monotonie de la fonction f sur chacun des intervalles $[0; 2[$ et $]2; +\infty[$ puis dresser Le tableau de variations de la fonction f sur son ensemble de définition.

③ Tracer la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

④ On considère la fonction numérique g définie sur l'intervalle $]1; +\infty[$ par : $g(x) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{-4x^3 + 1}{x^3 - 1}\right)$.

a) Vérifier que pour tout $x \in \,]1; +\infty[\, : g(x) = f(2x^3)$.

b) En déduire la monotonie de la fonction g sur l'intervalle $]1; +\infty[$.

Exercice 36

Partie I :

① Soit a et b deux nombres réels tels que $a > b$. On pose : $n = 1 + E\left(\dfrac{1}{a-b}\right)$ et $m = E(nb)$.

a) Vérifier que : $n \in \mathbb{N}^*$ et $\dfrac{1+m}{n} \in \mathbb{Q}$.

b) Montrer que : $b < \dfrac{1+m}{n} < a$.

② Soit α et β deux nombres réels tels que : $\alpha > \beta$.

a) Vérifier qu'il existe deux rationnels x et y tels que : $\beta < x < y < \alpha$.

b) On pose : $p = 1 + E\left(\dfrac{\sqrt{2}}{y - x}\right)$. Vérifier que $p \in \mathbb{N}^*$.

c) On pose : $\omega = \dfrac{\sqrt{2}}{p} + x$. Montrer que ω est irrationnel et que : $\beta < \omega < \alpha$.

Partie II :

Soit f une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ telle que : $(\forall \, (a;b) \in \mathbb{R}^2) \begin{cases} f(ab) = f(a)f(b) \\ f(a+b) = f(a) + f(b) \end{cases}$.

① Calculer $f(0)$ puis déterminer les deux valeurs possibles de $f(1)$.

② Montrer que la fonction f est impaire.

③ On suppose dans cette question que $f(1) = 1$.

a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{N}$: $f(x) = x$.

b) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{Z}$: $f(x) = x$.

c) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{Q}$: $f(x) = x$.

d) Montrer que la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$.

e) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = x$ (**Indication :** On pourra utiliser la partie I)

Exercice 37

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x)=1+\sqrt{x-4E\left(\dfrac{x}{4}\right)}$.

On note $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

① Montrer que l'ensemble de définition de la fonction f est : $D_f=\mathbb{R}$.

② Montrer que le nombre 4 est une période de la fonction f.

③ Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R})\quad 1\leqslant f(x)<3$.

④ a) Vérifier que pour tout $x\in[0;4[\ :\ f(x)=1+\sqrt{x}$.

b) Tracer la courbe $(\mathcal{C}_f)$ sur l'intervalle $[-4;8[$.

Exercice 38

Soit f une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$, impaire et périodique de période 3 telle que :

$$\left(\forall x\in\left[0;\frac{3}{2}\right]\right)\quad f(x)=x(x-3)$$

① Calculer $f(3k)$, $f\left(3k+\dfrac{3}{2}\right)$ et $f\left(\dfrac{3k}{2}\right)$ pour tout $k\in\mathbb{Z}$.

② Exprimer $f(x)$ dans chacun des cas suivants :

<u>1</u>

<u>**1er cas :**</u> $x\in\left[-\dfrac{3}{2};0\right]$; <u>**2ème cas :**</u> $x\in\left[\dfrac{3}{2};3\right]$; <u>**3ème cas :**</u> $x\in\left[-3;-\dfrac{3}{2}\right]$

③ Représenter la courbe de la fonction f dans un repère orthonormé.

Exercice 39

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x)=(-1)^{E(x)}\left(x-E(x)-\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{1}{2}$.

On note $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

① Montrer que le nombre 2 est une période de la fonction f.

② Déterminer l'expression de $f(x)$ pour tout $x\in[0;1[$ puis pour tout $x\in[1;2[$

③ Tracer la courbe $(\mathcal{C}_f)$ sur l'intervalle $[-6;6]$.

Exercice 40

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{4x}{x^2+1}$.

<u>**Partie I :**</u>

① Étudier la parité de la fonction f.

② Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$: $|f(x)|\leqslant 2$

③ Étudier la monotonie de la fonction f sur chacun des intervalles $[0;1]$ et $[1;+\infty[$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

④ Montrer que pour tous réels positifs a et b : $a+b \geqslant \sqrt{2} \Rightarrow \dfrac{(a+b)^2+1}{a+b} \geqslant \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

⑤ Montrer que : $f(\mathbb{R}) = [-2;2]$.

Partie II :

Soit g et h les fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$g(x) = \sqrt{x} \qquad \text{et} \qquad h(x) = \frac{4\sqrt{x}}{1+x}.$$

① Représenter la fonction g dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

② a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+) \quad 0 \leqslant h(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$

b) Résoudre dans $\mathbb{R}^+$ l'équation : $4h(x) = \sqrt{2(x+1)}$.

c) Vérifier que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+)\ h(x) = f \circ g(x)$.

d) Dresser le tableau de variations de la fonction h.

Exercice 41

Soit f et g deux fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\frac{1}{2} \leqslant f(x) \leqslant 1 \qquad \text{et} \qquad g(x) = f(x) - \frac{1}{2}$$

On suppose qu'il existe un réel T strictement positif tel que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f(x+T) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - (f(x))^2}$$

① Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad (g(x+2T))^2 = (g(x))^2$

② En déduire que le nombre $2T$ est une période des fonctions g et f.

Exercice 42

Soit p un entier naturel non nul et f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = E(x) + E\left(x+\frac{1}{p}\right) + E\left(x+\frac{2}{p}\right) + \ldots + E\left(x+\frac{p-1}{p}\right) - E(px)$$

① Montrer que le nombre $\dfrac{1}{p}$ est une période de la fonction f.

② Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R})\ (\exists k \in \mathbb{Z})$; $x \in \left[\dfrac{k}{p};\dfrac{k+1}{p}\right[$.

③ Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R})\ (\forall n \in \mathbb{Z}) \quad f\left(x+\dfrac{n}{p}\right) = f(x)$.

④ En déduire que : $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad E(x) + E\left(x+\dfrac{1}{p}\right) + E\left(x+\dfrac{2}{p}\right) + \ldots + E\left(x+\dfrac{p-1}{p}\right) = E(px)$

Exercice 43

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x)=\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}$.

① Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f.

② Montrer que pour tout $x\in D_f$: $0<f(x)\leqslant\sqrt{3}$.

③ a) Montrer que pour tous deux réels distincts x et y :

$$f(x)-f(y)=(x-y)\left(\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{y+2}}-\frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}}\right)$$

b) En déduire la monotonie de la fonction f sur D_f.

④ Soit g la fonction numérique définie par : $g(x)=\dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}$.

a) Déterminer D_g l'ensemble de définition de la fonction g.

b) Vérifier que pour tout $x\in D_g$: $g(x)=f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

c) En déduire la monotonie de la fonction g sur D_g.

Exercice 44

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^3+x^2+x$.

① a) Montrer que pour tout $(x;y)\in\mathbb{R}^2$: $x^2+x(1+y)+y^2+y+1>0$.

b) Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

c) En déduire que l'équation $f(x)=2020$ admet au plus une solution dans $\mathbb{R}$.

② On considère la fonction numérique g définie sur $]-\infty;10]$ par : $g(x)=\sqrt{10-x}$.

a) Étudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $]-\infty;10]$.

b) En déduire que l'équation $f(x)=g(x)$ admet une solution unique dans l'intervalle $]-\infty;10]$.

③ Soit h la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $h(x)=\dfrac{1+x+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}$.

a) Vérifier que pour tout $x\in\ ]0;+\infty[$: $h(x)=f\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

b) En déduire la monotonie de la fonction h sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

Exercice 45

Déterminer toutes les fonctions f définies de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ dans chacun des cas suivants :

① $(\forall x\in\mathbb{R})\quad 2f(x)+f(1-x)=x$; ② $(\forall x\in\mathbb{R})\quad 3f(x-1)-f(1-x)=x$.

③ $(\forall x\in\mathbb{R})\quad f(x)-f(-x)=x^2$; ④ $(\forall x\in\mathbb{R})\quad 3f(x)-5f(-x)=2x^2+24x+4$.

Exercice 46

On dispose d'une plaque en carton de forme carrée dont la longueur du côté est $6dm$. À partir de cette plaque, on réalise une boîte dont la forme est une parallélépipède rectangle selon les consignes suivantes :

- ► On découpe, dans chaque coin de la plaque, un carré de côté xdm ;
- ► Puis, on élève les quatre bords de la pièce en les pliants.

① Montrer que le volume, en dm^3, de la boîte obtenue est : $v(x) = 4(x^3 - 6x^2 + 9x)$ avec $x \in [0;3]$.

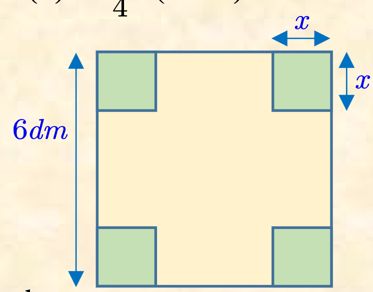
② a) Montrer que pour tous réels distincts a et b de l'intervalle $[0;3]$:

$$\frac{v(a)-v(b)}{a-b} = 4\left[\left(a+\frac{1}{2}b-3\right)^2 + \frac{3}{4}b(b-4)\right]$$

b) Donner le tableau de variations de la fonction u définie sur $[0;3]$ par : $u(x) = \frac{3}{4}x(x-4)$.

c) En déduire un encadrement de $\frac{v(a)-v(b)}{a-b}$ sur chacun des intervalles $[0;1]$ et $[1;3]$.

d) En déduire le tableau de variations de la fonction numérique v sur l'intervalle $[0;3]$.



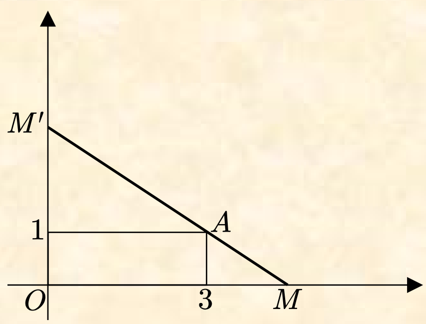
③ Déterminer la valeur de x pour laquelle le volume de la boîte serait maximal.

Exercice 47

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$, on considère les points $A(3;1)$ et $M(x;0)$ où x est un réel tel que $x > 3$.

La droite (AM) coupe l'axe des ordonnées au point M'.

Soit $S(x)$ l'aire du triangle OMM'.



① Montrer que pour tout $x \in]3;+\infty[$: $S(x) = \frac{x^2}{2(x-3)}$

② Soit a et b deux éléments distincts de l'intervalle $]3;+\infty[$.

a) Montrer que : $\frac{S(a)-S(b)}{a-b} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{9}{(a-3)(b-3)}\right)$.

b) En déduire la monotonie de la fonction S sur chacun des intervalles $]3;6]$ et $[6;+\infty[$ puis dresser le tableau de variations de la fonction S.

③ Déterminer la position du point M pour que l'aire du triangle OMM' soit minimale et déterminer cette aire dans ce cas.