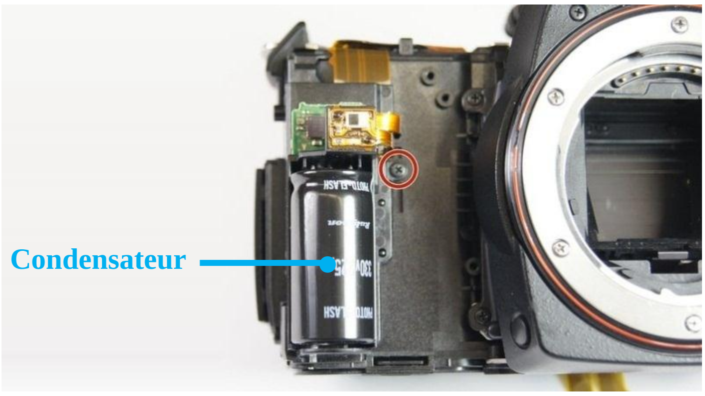
Leçon N°6 :
Dipôle RC

Introduction :

Dans les dispositifs électroniques comme les flashes des appareils photographiques, on trouve une grande variété des condensateurs.

➲ **Qu'est-ce qu'un condensateur ?**
➲ **Quel est leur rôle dans les circuits électriques ?**



I. Rappel : Généralités sur les circuits électriques

❶ **Dipôle :** On appelle dipôle toute composante électrique possède deux bornes.

❷ **Sens de courant électrique :** Par convention, le courant électrique circule toujours de la *borne positive* (+) vers la *borne négative* (-) à l'extérieur du générateur.

❸ **Nature du courant électrique :** Dans les métaux, le courant électrique est dû au déplacement des électrons dans le *sens contraire* de sens conventionnel du courant électrique c.-à-d. de la *borne négative* (-) vers la *borne positive* (+) à l'extérieur du générateur.

❹ **Convention récepteur – générateur :**
- Dans la convention générateur, la tension et le courant ont le *même sens*.
- Dans la convention récepteur, la tension et le courant ont de *sens opposés*.

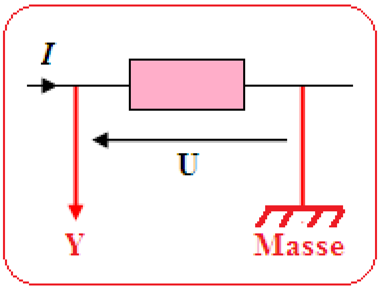
❺ **loi d'ohm :** La loi d'Ohm est une loi physique qui lie l'intensité électrique I traversant un conducteur ohmique à la tension électrique U appliquée entre ses bornes, tel que :

$$U = R \times I$$

R : est La résistance électrique de ce conducteur en (Ω).

❻ **L'oscilloscope :** C'est un appareil électrique permettant de visualiser la tension électrique entre les bornes d'un dipôle électrique.

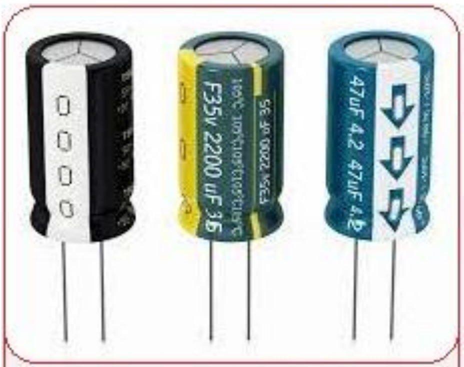
Pour visualiser la tension entre les bornes d'un récepteur électrique sur l'oscilloscope, on branche la borne d'entrée de courant avec *l'entrée Y* de l'oscilloscope (borne rouge), et la borne de sortie de courant avec la *masse* (borne noire).



II. Le condensateur

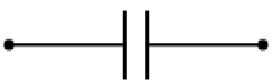
1. Définition et symbole d'un condensateur

Le condensateur est un dipôle électrique composé de deux conducteurs métalliques appelés *armatures*, séparés par un matériau isolant diélectrique.



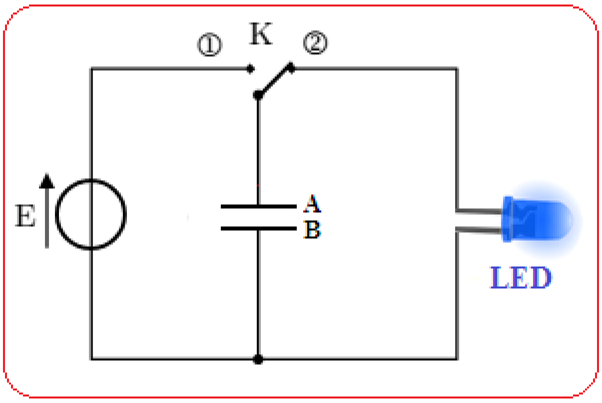
Condensateurs cylindriques

Son symbole dans le circuit électrique est :



2. Charge d'un condensateur

a. Activité expérimentale



On réalise le circuit suivant comportant un condensateur, une diode électroluminescente, un générateur de tension continue, et un interrupteur K.
On place l'interrupteur K à la position (1) à un certain temps, puis on le bascule à la position (2).

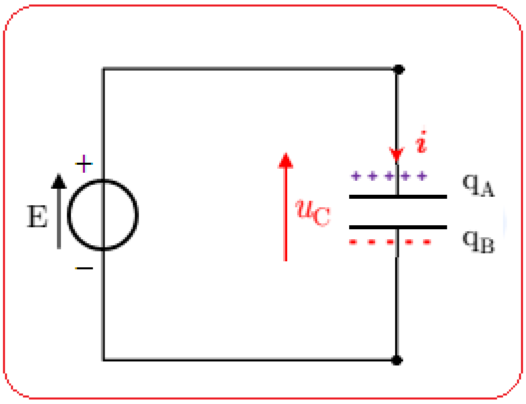
☞ *Que remarquez – vous ?*

b. Observation

Lorsqu'on bascule l'interrupteur K à la position (2), la diode électroluminescente *s'allume* pendant un certain temps, cela indique qu'un courant électrique apparaît pendant quelques instants dans le circuit (2).

☞ *D'où vient ce courant électrique ?*

c. Interprétation



– Le courant transitoire apparaît dans le circuit est dû au *déplacement des électrons* quand le condensateur est branché avec le générateur, ç-à-d en position (1), ce dernier provoque une *accumulation* d'électrons sur l'armature B reliée à la borne (-) du générateur et *un défaut d'électrons* sur l'armature A.
– L'armature A, reliée à la borne (+), *se charge positivement* ($q_A > 0$) et l'armature B *se charge négativement* ($q_B < 0$), donc une tension électrique apparaît entre les armatures : le condensateur *se charge*.
– Le courant ne peut circuler durablement, car le circuit est coupé par la présence de l'isolant diélectrique du condensateur.

♣ La **charge du condensateur** ou la **quantité d'électricité emmagasinée dans le condensateur** est la charge de l'armature positive, elle est notée Q, et son unité est *Coulomb* (C) :

$$Q = q_A = -q_B$$

Remarque :

Quand on bascule l'interrupteur K à la position (2), les électrons accumulés sur l'armature B du condensateur *reviennent à leur position d'origine*, ce qui provoque le passage d'un courant électrique dans le circuit (2), et c'est ce qui conduit à l'allumage de la diode LED. On dit que le condensateur *se décharge* dans la diode.

3. Relation entre la charge électrique q et l'intensité du courant électrique i

Par définition, l'intensité du courant électrique correspond au *débit de charges électriques transportées*, c'est-à-dire à la quantité d'électricité transportée au condensateur par unité de temps.
Dans le cas du *courant variable*, l'intensité du courant électrique i est exprimée par la relation suivante :

$$i = \frac{dq}{dt}$$

i : L'intensité du courant en (A).
$q = q_A$: La charge du condensateur en (C).
t : Le temps en (s).

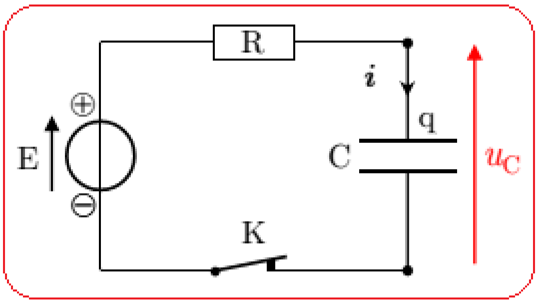
Remarque :

- Si $\boldsymbol{i} > \mathbf{0}$: q_A *augmente*, le condensateur *se charge*.
- Si $\boldsymbol{i} < \mathbf{0}$: q_A *diminue*, le condensateur *se décharge*.

4. Relation entre la charge d'un condensateur *q* et la tension entre ses bornes U_c

La charge électrique $\boldsymbol{q}$ portée par une armature d'un condensateur est *proportionnelle* à la tension $\boldsymbol{U_c}$ entre ses bornes.

Le coefficient de proportionnalité est une caractéristique du condensateur, il est appelé *capacité du condensateur*, notée $\boldsymbol{C}$. La capacité $\boldsymbol{C}$ s'exprime dans le (S.I) en *Farad* (de symbole *F*).



Selon l'armature considérée, la charge et la tension vérifient la relation suivante :

$$\boldsymbol{q = C\,U_c}$$

$\boldsymbol{q}$: La charge du condensateur en (*C*).
$\boldsymbol{U_c}$: La tension entre les bornes du condensateur en (*V*).
$\boldsymbol{C}$: La capacité du condensateur en (*F*).

Remarque :

Pour les condensateurs usuels, les valeurs de capacité sont exprimées en sous-multiples du Farad :

$$\mathbf{1}\boldsymbol{mF} = \mathbf{10^{-3}}\boldsymbol{F} \quad ; \quad \mathbf{1}\boldsymbol{\mu F} = \mathbf{10^{-6}}\boldsymbol{F} \quad ; \quad \mathbf{1}\boldsymbol{nF} = \mathbf{10^{-9}}\boldsymbol{F} \quad ; \quad \mathbf{1}\boldsymbol{pF} = \mathbf{10^{-12}}\boldsymbol{F}$$

5. Relation entre l'intensité du courant *i* et la tension U_c

En convention récepteur, on a :

$$\begin{cases} \boldsymbol{i(t) = \dfrac{dq}{dt}} \\ \boldsymbol{q(t) = C\,U_c(t)} \end{cases}$$

Donc :

$$\boldsymbol{i(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}[C\,U_c(t)]}$$

D'où :

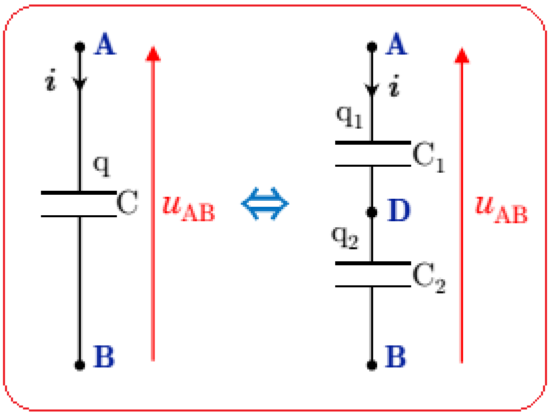
$$\boldsymbol{i(t) = C\,\frac{dU_c}{dt}}$$

III. Association des condensateurs

1. Association en série

On considère deux condensateurs de capacités $\boldsymbol{C_1}$ et $\boldsymbol{C_2}$ branchés *en série*, les deux condensateurs sont traversés par le même courant électrique, donc :

$$q_1 = q_2$$



Selon la loi d'additivité des tensions, on écrit :

$$U_{AB} = U_{AD} + U_{DB}$$

Avec :

$$U_{AB} = \frac{q}{C} \quad ; \quad U_{AD} = \frac{q_1}{C_1} \quad ; \quad U_{DB} = \frac{q_2}{C_2} \quad ; \quad q = q_1 = q_2$$

On écrit, alors :

$$U_{AB} = \frac{q_1}{C_1} + \frac{q_2}{C_2} = q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) = \frac{q}{C}$$

D'où :

$$\boldsymbol{\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$$

Généralisation :

La capacité du condensateur équivalente à un ensemble de condensateurs de capacités $\boldsymbol{C_1}$, $\boldsymbol{C_2}$, …, $\boldsymbol{C_n}$ branchés en série est :

$$\boldsymbol{\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i}}$$

☞ *L'association en série* des condensateurs permet d'obtenir un condensateur de capacité *plus petite* pouvant supporter une tension *plus grande*, qui ne peut pas être supporté par chaque condensateur s'il est utilisé séparément.

2. Association en parallèle :

On considère deux condensateurs de capacités $\boldsymbol{C_1}$ et $\boldsymbol{C_2}$ branchés *en parallèle*.

D'après loi des nœuds, on a :

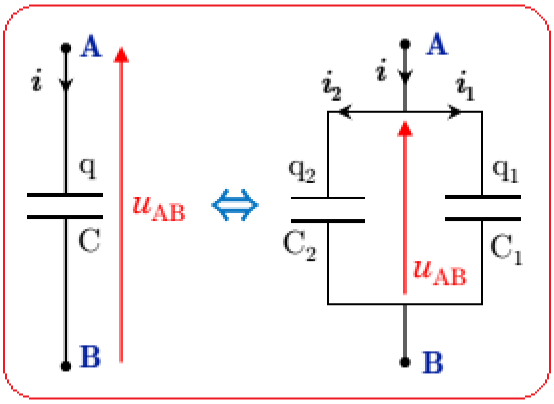
$$i = i_1 + i_2$$

Donc :

$$\frac{dq}{dt} = \frac{dq_1}{dt} + \frac{dq_2}{dt} = \frac{d}{dt}(q_1 + q_2)$$

D'où :

$$q = q_1 + q_2$$



Et puisque :

$$q_1 = C_1\, U_{AB} \qquad ; \qquad q_2 = C_2\, U_{AB} \qquad ; \qquad q = C\, U_{AB}$$

Alors :

$$C\, U_{AB} = C_1\, U_{AB} + C_2\, U_{AB} = (C_1 + C_2)\, U_{AB}$$

D'où :

$$\boldsymbol{C = C_1 + C_2}$$

Généralisation :

La capacité du condensateur équivalente à un ensemble de condensateurs de capacités $\boldsymbol{C_1}$, $\boldsymbol{C_2}$, …, $\boldsymbol{C_n}$ branchés en parallèle est :

$$\boldsymbol{C = C_1 + C_2 + \cdots + C_n = \sum_{i=1}^{n} C_i}$$

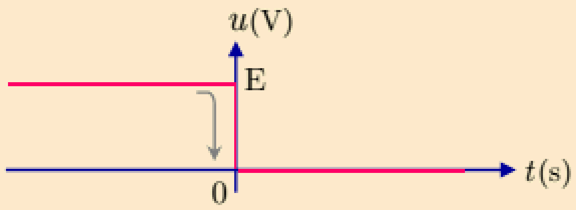
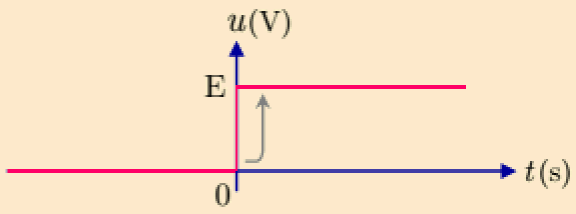
☞ *L'association en parallèle* des condensateurs permet d'obtenir un condensateur de capacité *plus grande* pouvant emmagasiner une charge *plus grande* sous une *tension petite*.

IV. Réponse d'un dipôle RC à un échelon de tension

1. Définitions

Le *dipôle* $\boldsymbol{RC}$ est l'association en série d'un conducteur ohmique de résistance $\boldsymbol{R}$ et d'un condensateur de capacité $\boldsymbol{C}$.

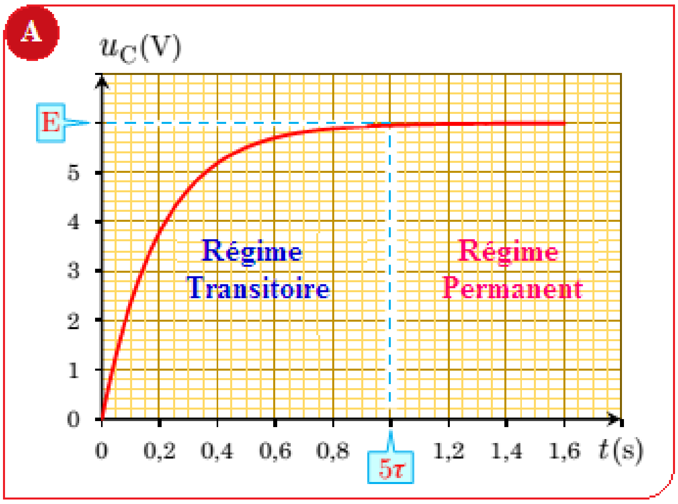
Échelon de tension : est un signal électrique $u(t)$. On distingue deux types :

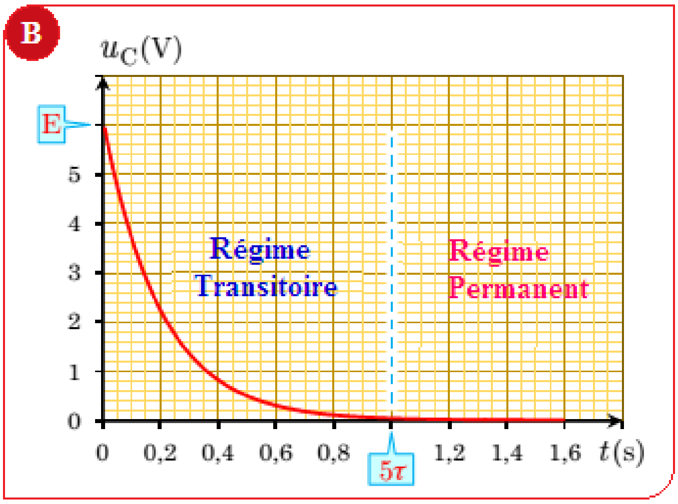
Echelon de tension descendant	Echelon de tension montant
Quand : $t < 0 : u = E$ Quand : $t \geq 0 : u = 0$	Quand : $t < 0 : u = 0$ Quand : $t \geq 0 : u = E$
	

2. Réponse d'un dipôle RC à un échelon de tension – étude expérimentale

On considère le montage électrique ci-contre : Le condensateur est initialement *déchargé* ($U_c(t=0)=0$).
On prend : $E = 6V$; $C = 100\,\mu F$; $R = 2k\Omega$

- A l'instant $t = 0$, on place K à la position (1), et on visualise la variation de tension U_c en fonction du temps. On obtient la *courbe A* : le dipôle RC est soumis à un *échelon de tension montant* : **charge du condensateur**.
- Qu'on le condensateur se charge totalement, on bascule de la position (2). On obtient la *courbe B* : le dipôle RC est soumis à un *échelon de tension descendant* : **décharge du condensateur**.





Observations expérimentales :

- La *durée de charge* et de *décharge* est égale à 5τ.
- On constate *2 régimes* :

☞ **Régime transitoire** : La tension U_c augmente (dans le cas de charge) et diminue (dans le cas de décharge). Il est obtenu quand $t < 5\tau$.

☞ **Régime permanant** : La tension U_c reste constante, et égale à E lors de la charge, et **nulle** lors de décharge. Il est obtenu quand $t \geq 5\tau$.

3. Réponse RC à un échelon montant de tension (charge du condensateur)- étude théorique

a. Équation différentielle vérifiée par la tension U_c

A l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur K. Le condensateur est initialement déchargé $u_c(t=0)=0$.

- D'après la loi d'additivité des tensions, on a :

$$u_R + u_c = E$$

- Et d'après la loi d'Ohm :

$$u_R = R.i$$

On a :

$$i = C\frac{du_c}{dt}$$

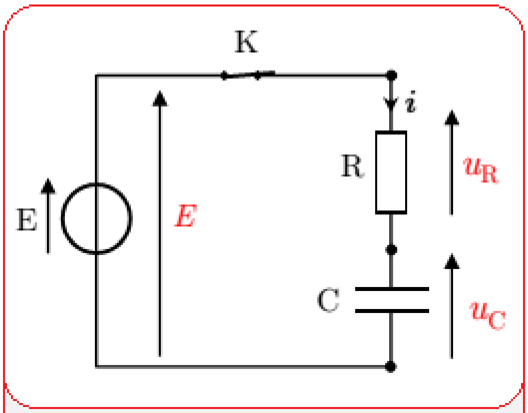
Donc :

$$u_R = RC\frac{du_c}{dt}$$

D'où :

$$RC\frac{du_c}{dt} + u_c = E$$

On pose : $\boldsymbol{\tau = RC}$



RC soumis à un échelon montant de tension

L'équation différentielle devient :

$$\boldsymbol{\tau\frac{du_c}{dt} + u_c = E}$$

Remarque :

On a :

$$q = C\,u_c$$

Donc :

$$u_c = \frac{q}{C}$$

Et :

$$u_R = Ri = R\frac{dq}{dt}$$

On remplace dans loi d'additivité des tensions, on trouve :

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E$$

D'où :

$$RC\frac{dq}{dt} + q = CE$$

Finalement :

$$\boldsymbol{\tau\frac{dq}{dt} + q = CE}$$

C'est l'équation différentielle vérifiée par la charge q du condensateur pendant sa charge.

b. Solution de l'équation différentielle

On admet que la solution de l'équation différentielle $\tau\frac{du_c}{dt} + u_c = E$ s'écrit sous la forme :

$$\boldsymbol{u_c(t) = Ae^{-\alpha t} + B}$$

$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, et $\boldsymbol{\alpha}$ sont des constantes à déterminer.

➢ **Détermination de B et α en utilisant l'équation différentielle :**

On a :

$$u_c(t) = Ae^{-\alpha t} + B$$

Donc :

$$\frac{du_c}{dt} = -\alpha Ae^{-\alpha t}$$

On remplace les deux expressions précédentes dans l'équation différentielle :

$$-\tau\,\alpha\,Ae^{-\alpha t} + Ae^{-\alpha t} + B = E$$

$$Ae^{-\alpha t}(-\tau\,\alpha + 1) = E - B$$

Pour que cette expression soit vérifié, il faut que :

$$\begin{cases} -\tau\,\alpha + 1 = 0 \\ E - B = 0 \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{1}{\tau} = \dfrac{1}{RC} \\ B = E \end{cases}$$

➢ **Détermination de A en utilisant les conditions initiales :**

A l'instant $t = 0$, le condensateur est initialement déchargé, ç-à-d : $u_c(t=0) = 0$

Donc :

$$u_c(t=0) = Ae^{-\alpha\times 0} + E = 0$$

Alors :

$$A + E = 0$$

D'où :

$$A = -E$$

Finalement, l'expression de la tension $u_c(t)$ s'écrit sous la forme :

$$u_c(t) = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

Remarques :

✓ **L'expression de la charge :**

On a :

$$q = Cu_c$$

Donc :

$$q(t) = CE(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

✓ **L'expression de l'intensité du courant :**

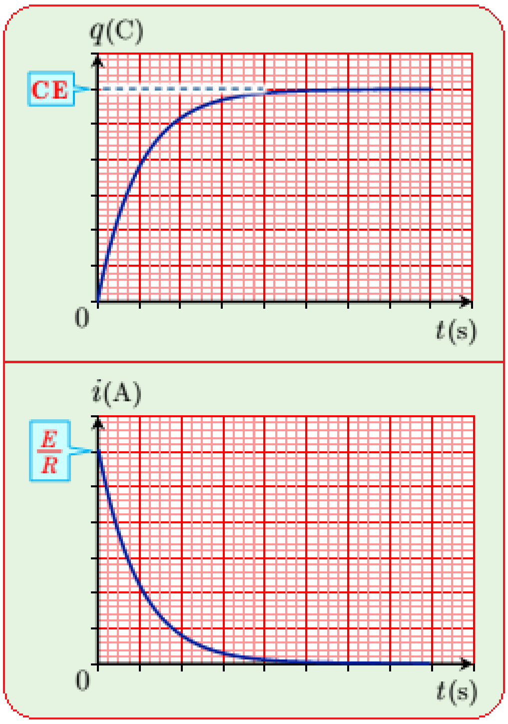
On a :

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = C\frac{du_c}{dt}$$

$$i(t) = CE\left(\frac{1}{\tau}\,e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = CE(\frac{1}{RC}\,e^{-\frac{t}{\tau}})$$

Donc :

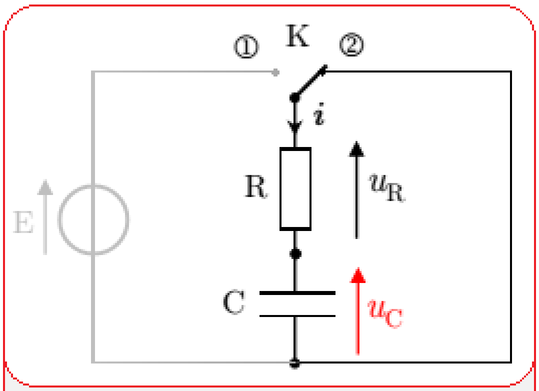
$$i(t) = \frac{E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}$$



4. Réponse RC à un échelon descendant de tension (décharge de condensateur) - étude théorique

a. Équation différentielle vérifiée par la tension u_c

On considère le circuit suivant, tel que le condensateur est *chargé totalement* : $u_c(t=0) = E$, à l'instant $t = 0$ on bascule l'interrupteur K à la position (2), le condensateur se décharge dans le conducteur ohmique R.



RC soumis à un échelon descendant de tension

- D'après la loi d'additivité des tensions, on a :

$$u_R + u_c = 0$$

- Et d'après la loi d'Ohm :

$$u_R = R.i$$

On a :

$$i = C\frac{du_c}{dt}$$

Donc :

$$u_R = RC\frac{du_c}{dt}$$

D'où :

$$RC\frac{du_c}{dt} + u_c = 0$$

On pose : $\boldsymbol{\tau = RC}$

L'équation différentielle devient :

$$\boldsymbol{\tau\frac{du_c}{dt} + u_c = 0}$$

Remarque :

On a :

$$q = C\,u_c$$

Donc :

$$u_c = \frac{q}{C}$$

Et :

$$u_R = Ri = R\frac{dq}{dt}$$

On remplace dans loi d'additivité des tensions, on trouve :

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$$

D'où :

$$RC\frac{dq}{dt} + q = 0$$

Finalement :

$$\boldsymbol{\tau\frac{dq}{dt} + q = 0}$$

C'est l'équation différentielle vérifiée par la charge q du condensateur pendant sa charge.

b. b- Solution de l'équation différentielle

On admet que la solution de l'équation différentielle $\tau\frac{du_c}{dt} + u_c = 0$ s'écrit sous la forme :

$$\boldsymbol{u_c(t) = Ae^{-\beta t}}$$

$\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{\beta}$ sont des constantes.

- **Détermination de β en utilisant l'équation différentielle :**

On a :

$$u_c(t) = Ae^{-\beta t}$$

Donc :

$$\frac{du_c}{dt} = -\beta Ae^{-\beta t}$$

On remplace les deux expressions précédentes dans l'équation différentielle :

$$-\tau\,\beta\,Ae^{-\beta t} + Ae^{-\beta t} = 0$$

$$Ae^{-\beta t}(-\tau\,\beta + 1) = 0$$

Pour que cette expression soit vérifié, il faut que :

$$-\tau\,\beta + 1 = 0$$

Donc :

$$\boldsymbol{\beta = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{RC}}$$

- **Détermination de A en utilisant les conditions initiales :**

A l'instant $\boldsymbol{t = 0}$, le condensateur est initialement chargé, ç-à-d : $u_c(t = 0) = E$

Donc :

$$u_c(t = 0) = Ae^{-\beta\times 0} = E$$

Alors :

$$\boldsymbol{A = E}$$

Finalement, l'expression de la tension $u_c(t)$ s'écrit sous la forme :

$$\boldsymbol{u_c(t) = Ee^{-\frac{t}{\tau}}}$$

Remarques :

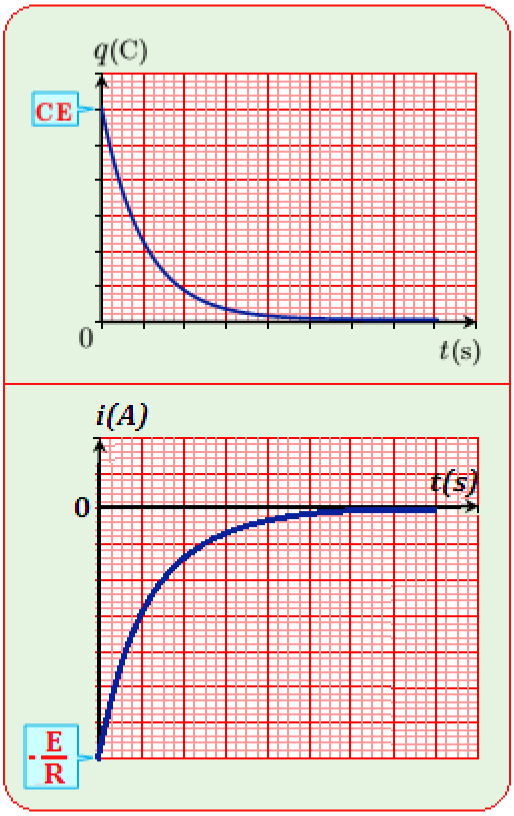
- ✓ **L'expression de la charge :**

On a :

$$q = Cu_c$$

Donc :

$$\boldsymbol{q(t) = CEe^{-\frac{t}{\tau}}}$$



- ✓ **L'expression de l'intensité du courant :**

On a :

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = C\frac{du_c}{dt}$$

$$i(t) = CE\left(-\frac{1}{\tau}\,e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

$$i(t) = -CE(\frac{1}{RC}\,e^{-\frac{t}{\tau}})$$

Donc :

$$\boldsymbol{i(t) = -\frac{E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}}$$

5. Constante du temps τ

a. Définition

La constante du temps d'un dipôle RC est la grandeur : $\boldsymbol{\tau = RC}$

b. Analyse dimensionnelle de la constante du temps τ

– Pour le condensateur :

$$i = C\frac{du_c}{dt} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{i}{\frac{du_c}{dt}}$$

Donc :

$$[C] = \frac{[i]}{\frac{[u]}{[t]}} = \frac{[i][t]}{[u]} = \frac{I.T}{[u]}$$

– Pour le conducteur ohmique :

$$u_R = Ri \quad \Rightarrow \quad R = \frac{u_R}{i}$$

Donc :

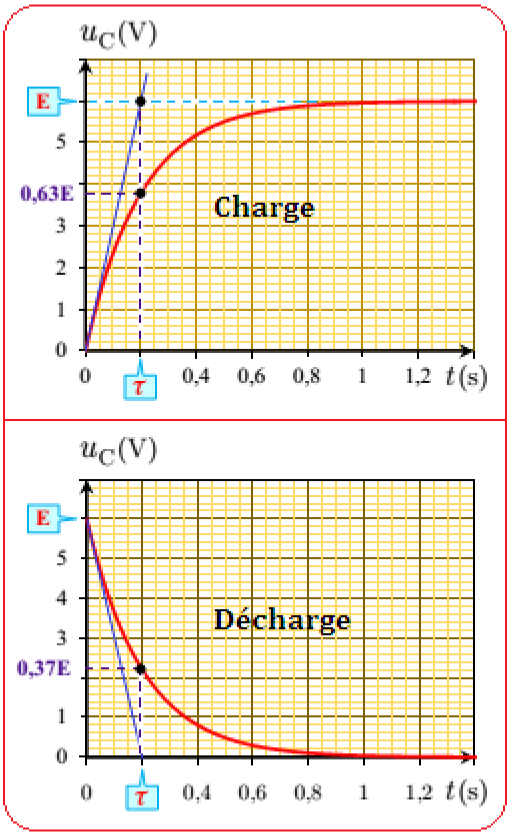
$$[R] = \frac{[u]}{[i]} = \frac{[u]}{I}$$

On en déduit que :

$$[\boldsymbol{\tau}] = [RC] = [R][C] = \frac{[u]}{I} \times \frac{I.T}{[u]} = \boldsymbol{T}$$

La constante du temps $\boldsymbol{\tau}$ a *une dimension de temps*, elle s'exprime en *seconde* (s).

c. Détermination de la constante de temps



✂ **Charge du condensateur :** $\boldsymbol{u_c(t) = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})}$

- **Méthode ❶ :**

A $\boldsymbol{t = \tau}$, on a : $\boldsymbol{u_c(t = \tau) = E\left(1 - e^{-\frac{\tau}{\tau}}\right) = E(1 - e^{-1}) = 0,63.E}$

Donc : $\boldsymbol{\tau}$ représente *l'abscisse correspondante à l'ordonnée* $\boldsymbol{0,63.E}$.

- **Méthode ❷ :** $\boldsymbol{\tau}$ est *l'abscisse du point d'intersection* de la *tangente à la courbe* à $\boldsymbol{t = 0}$ avec *la droite* $\boldsymbol{u_c = E}$.

✂ **Décharge du condensateur :** $\boldsymbol{u_c(t) = E\, e^{-\frac{t}{\tau}}}$

- **Méthode ❶ :**

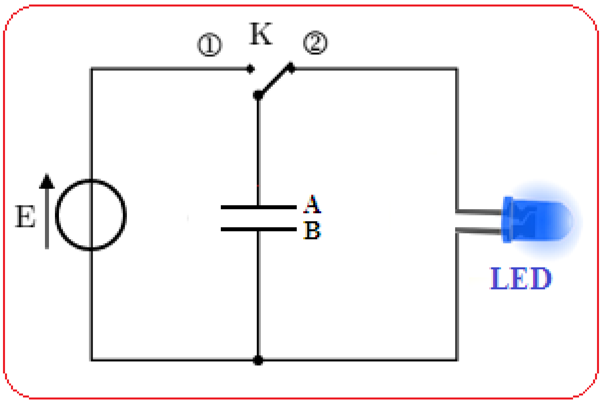
A $\boldsymbol{t = \tau}$, on a : $\boldsymbol{u_c(t = \tau) = E\, e^{-\frac{\tau}{\tau}} = E\, e^{-1} = 0,37.E}$

Donc : $\boldsymbol{\tau}$ représente *l'abscisse correspondante à l'ordonnée* $\boldsymbol{0,37.E}$.

- **Méthode ❷ :** $\boldsymbol{\tau}$ est *l'abscisse du point d'intersection* de la *tangente à la courbe* à $\boldsymbol{t = 0}$ avec *l'axe de temps*.

V. Energie emmagasinée dans un condensateur

1. Mise en évidence expérimentale



🖂 Quand on met l'interrupteur K à la position (1), le condensateur *se charge*, et *stocke une énergie électrique*.

🖂 Quand on bascule l'interrupteur K à la position (2), le condensateur fournie cette énergie à la diode LED, et elle s'allume.

🖂 L'énergie emmagasinée dans un condensateur augmente avec sa capacité $\boldsymbol{C}$, ou avec la force électromotrice $\boldsymbol{E}$ du générateur.

2. Energie emmagasinée dans un condensateur

- La puissance électrique reçue par le condensateur est :

$$P_e = u_c.i$$

Puisque :

$$i = C\frac{du_c}{dt}$$

Donc :

$$P_e = C\,u_c\frac{du_c}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}C{u_c}^2\right)$$

Et puisque :