Dipôle RL

I- La bobine.

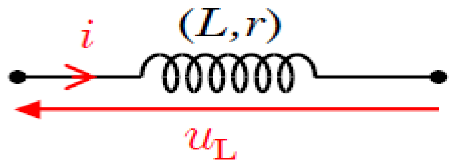
1) Définition :

Une bobine est constituée à partir d'un enroulement très serré de fil de cuivre qui est gainé sur un matériau isolant de faible épaisseur.

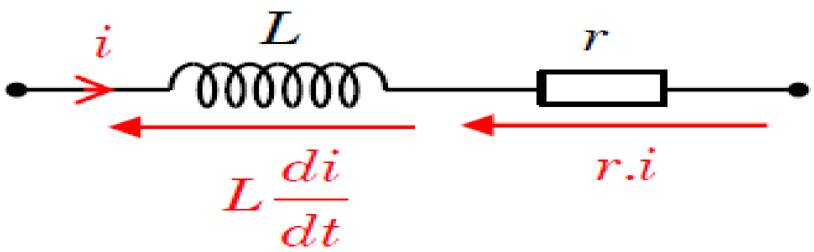
La bobine est caractérisée par deux paramètres :

- ✓ Sa résistance interne notée r exprimée en (Ω);
- ✓ Son inductance L exprimée en Henry (H);

Ainsi la représentation d'une bobine dans un schéma électrique est la suivante :



Ou bien :



2) Tension aux bornes d'une bobine.

La tension $u_L(t)$ aux bornes d'une bobine est liée à l'intensité $i(t)$ du courant qui la traverse par la relation :

$$\boxed{u_L(t) = L.\frac{di(t)}{dt} + r.i(t)}$$

Avec :

$u_L(t)$ en Volt (V) ; $i(t)$ en Ampère (A) ; r en Ohm (Ω) et L en Henry (H)

Remarque :

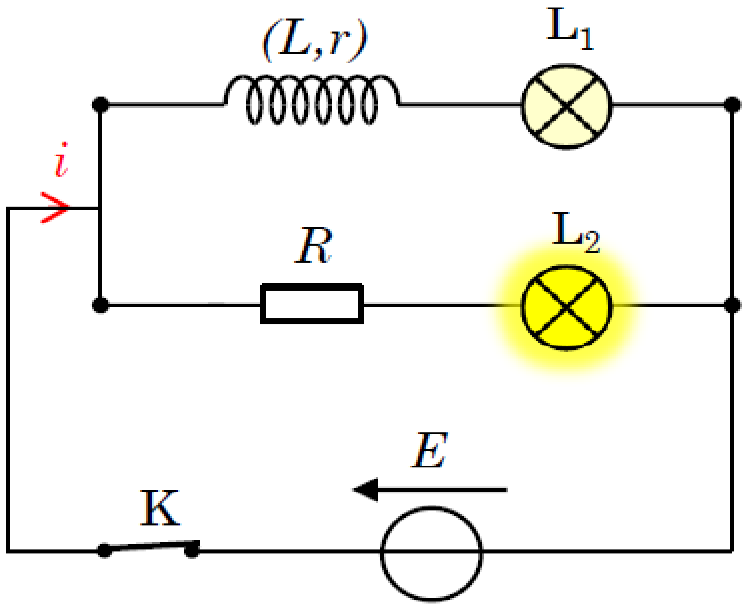
En régime permanent ; $i = I = cte$; alors $\frac{di(t)}{dt} = 0$, donc : $u_L = r.I$

D'où la bobine se comporte comme <u>un conducteur ohmique en régime permanent</u>.

3) Influence d'une bobine dans un circuit :

a) Expériences :

On réalise le circuit électrique ci-dessous, comportant un générateur de tension continue ; deux lampes identiques L_1 et L_2 ; une bobine de résistance interne r ; un conducteur ohmique de résistance $R \approx r$ et un interrupteur K :



- Expérience 1: On ferme l'interrupteur K et on observe l'allumage des deux lampes.
- Expérience 2: On ouvre l'interrupteur K et on observe l'allumage des deux lampes.

b) Observations :

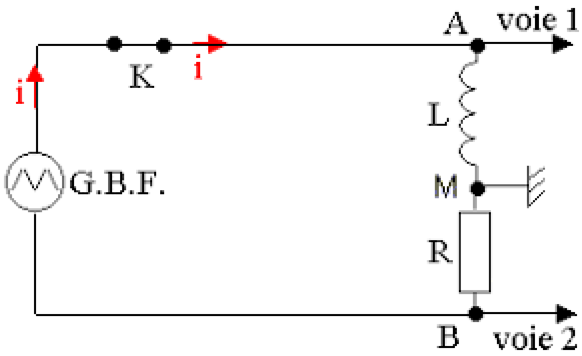
- Exp 1 : On constate que la lampe L_1 s'allume avec un léger retard par rapport à la lampe L_2.
  $\Longrightarrow$ La présence d'une bobine retarde l'établissement du courant dans la branche où elle est montée.
- Exp 2 : On constate que la lampe L_1 s'éteint avec un léger retard par rapport à la lampe L_2.
  $\Longrightarrow$ La présence d'une bobine retarde la coupure du courant dans la branche où elle est montée.

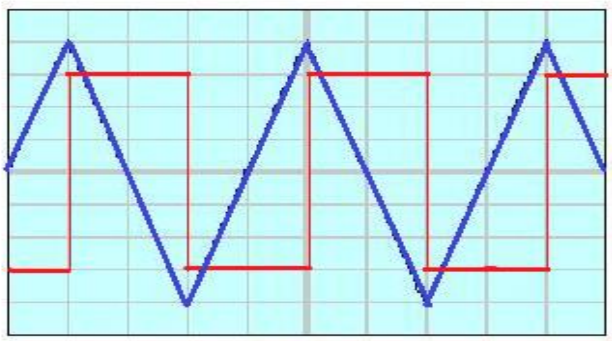
c) Conclusions :

« La bobine retarde l'établissement et la coupure du courant dans le circuit électrique ».

Application n°1 : Exercice n° 1 ; Série n°6

On réalise le circuit électrique ci-dessous; comportant un générateur à basses fréquences qui délivre une tension triangulaire, une bobine d'inductance L et de résistance interne négligeable et un conducteur ohmique de résistance $R = 5\Omega$.





A l'aide d'un oscilloscope on visualise les tensions $u_{AM}(t)$ *et* $u_{BM}(t)$.

On donne :

- ✓ *La sensibilité horizontale :* $S_h = 0{,}2ms/div$,
- ✓ *La sensibilité verticale de la voix A :* $S_v = 2V/div$,
- ✓ *La sensibilité verticale de la voix B :* $S_v = 0{,}2V/div$,

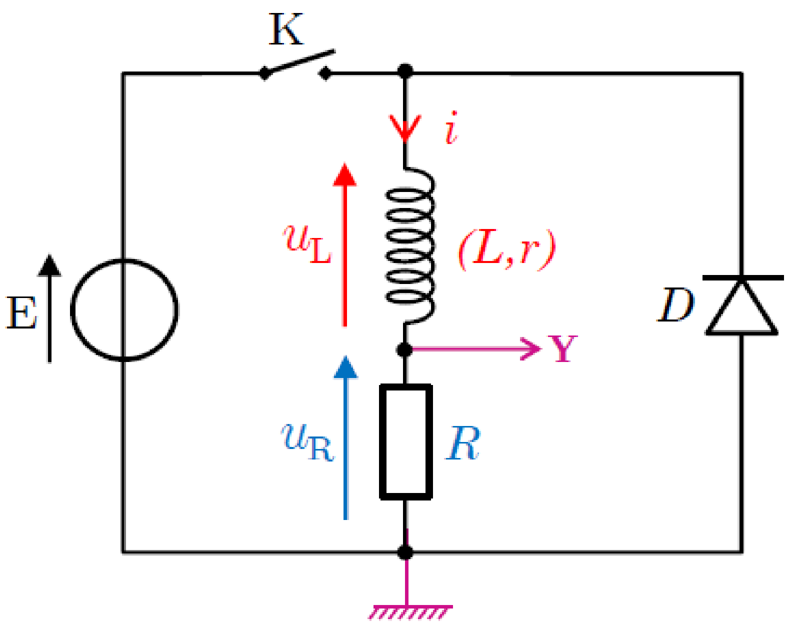
1) *Quelle est l'influence de la bobine lors de la fermeture du circuit*
2) a- *Exprimer la tension* $u_{AM}(t)$ *en fonction de L et* $i(t)$.
   b- *Exprimer la tension* $u_{BM}(t)$ *en fonction de R et* $i(t)$.
   c- *En déduire la relation :*
   $u_{AM}(t) = -\frac{L}{R}.\frac{du_{BM}}{dt}$
3) *Justifier l'allure des deux oscillogrammes correspondant à* $u_{AM}(t)$ *et* $u_{BM}(t)$.
4) *Déterminer la valeur de l'inductance L de la bobine.*

II) Réponse d'un dipôle RL à un échelon de tension :

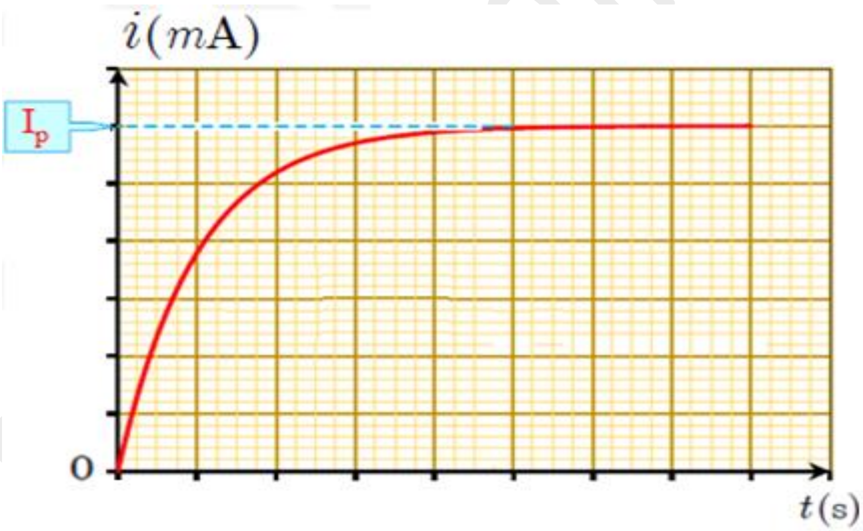
Le dipôle RL est l'association en série d'une bobine d'inductance L et de résistance interne r et d'un conducteur ohmique de résistance R.

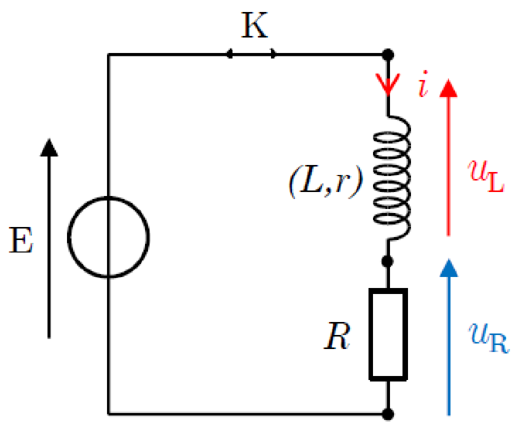
1) Réponse d'un dipôle RL à un échelon de tension montant :

- ➤ *Réalisons le circuit représenté sur le schéma suivant :*



- *On ferme l'interrupteur* K*, on obtient le graphe ci-dessous, représentant l'évolution de l'intensité* i *en fonction de temps :*





a) Equation différentielle du circuit :

On a d'après la loi d'additivité des tensions :

$$u_L + u_R = E \quad : \quad (1)$$

Et on a d'après la loi d'Ohm : $u_R = R.i$

Et on sait que : $u_L = L.\frac{di}{dt} + r.i$

Puis on remplace dans l'équation (1) *:*

$$L.\frac{di}{dt} + r.i + R.i = E$$

Soit :

$$L.\frac{di}{dt} + (R + r).i = E$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{L}{R+r}.\frac{di}{dt} + i = \frac{E}{R+r}}$$

L'équation différentielle du circuit

Qui peut s'écrire aussi sous la forme :

$$\boxed{\tau.\frac{di}{dt} + i = \frac{E}{R+r}}$$

Avec : $\tau = \frac{L}{R+r}$

Remarque : L'équation différentielle du circuit en fonction de la tension u_R*:*

On a d'après la loi d'additivité des tensions :

$$u_L + u_R = E \quad : (1)$$

Et on sait que : $u_L = L.\frac{di}{dt} + r.i$

Et on a d'après la loi d'Ohm : $u_R = R.i \Rightarrow \begin{cases} i = \frac{u_R}{R} \\ \text{et} \\ \frac{di}{dt} = \frac{d(\frac{u_R}{R})}{dt} = \frac{1}{R}\frac{du_R}{dt} \end{cases}$

Donc : $u_L = \frac{L}{R}.\frac{du_R}{dt} + \frac{r}{R}.u_R$

Puis on remplace dans l'équation (1) *:*

$$\frac{L}{R}.\frac{du_R}{dt} + \frac{r}{R}.u_R + u_R = E$$

$$\Rightarrow \frac{L}{R}.\frac{du_R}{dt} + \frac{R+r}{R}u_R = E$$

ou bien: $L.\frac{du_R}{dt} + (R + r)u_R = RE$

Soit aussi sous la forme :

$$\frac{L}{R+r}.\frac{du_R}{dt} + u_R = \frac{RE}{R+r}$$

b) Résolution de l'équation différentielle :

La solution de l'équation différentielle précédente s'écrit sous la forme :

$$i(t) = A(1 - e^{-\alpha t})$$

Avec A *et* α *deux constante à déterminer ;*

On a : $i(t) = A(1 - e^{-\alpha t})$

$\Longrightarrow \ i(t) = A - A.e^{-\alpha t}$

Donc : $\frac{di}{dt} = 0 - (-\alpha.A.e^{-\alpha t}) = \ \alpha.A.e^{-\alpha t}$

Puis on remplace dans l'équation différentielle précédente ; on obtient :

$$\tau\alpha.A.e^{-\alpha t} + \ A - A.e^{-\alpha t} = \frac{E}{R + r}$$

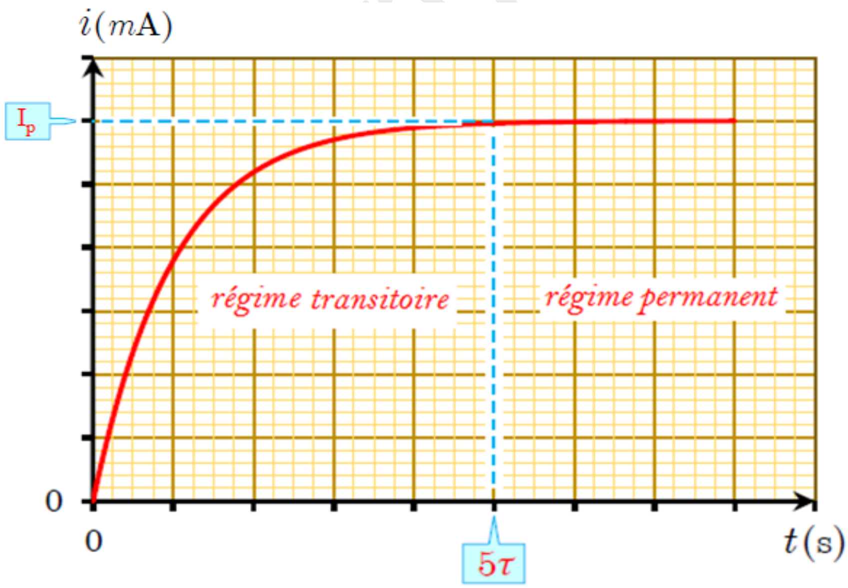
$\Longrightarrow A.e^{-\alpha t}(\tau\alpha - 1) = \frac{E}{R+r} - \ A$

c.à.d. que :

$$\begin{cases} \tau\alpha - 1 = 0 \\ \quad et \\ \frac{E}{R+r} - \ A = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \alpha = \frac{1}{\tau} \\ \\ A = \frac{E}{R+r} \end{cases}$$

D'où : $$\boxed{i(t) = \frac{E}{R + r}\left(1 - e^{-t/\tau}\right) = I_p.\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$$ *Avec :* $I_p = \frac{E}{R+r}$

- *Représentation graphique de* $i(t)$ *:*



La courbe de variations de $i(t)$ *comprend deux parties :*

- ✓ *Une première partie où* $i(t)$ *varie en fonction du temps ; c'est le régime transitoire .*
- ✓ *Une deuxième partie où* $i(t)$ *atteint une valeur constante égale à* I_p *; c'est le régime permanent.*

c) Constante du temps τ.

➢ *Montrons que τ est homogène à un temps :*

✓ *Analyse dimensionnelle :*

On a : $\tau = \frac{L}{R+r}$; *donc :* $[\tau] = \frac{[L]}{[R]}$

Et on a d'après la loi d'Ohm : $u_R = R.i$

$\Longrightarrow \quad [U] = [R].[I]$ *c.à.d. que :* $[R] = \frac{[U]}{[I]}$

Et on sait que, pour une bobine idéale : $\quad u_L = L.\frac{di}{dt}$

$\Longrightarrow \quad [U] = [L].\frac{[I]}{[t]}$ *c.à.d. que :* $[L] = \frac{[U]}{[I]}.[t]$

Donc : $[\tau] = \frac{\cancel{\frac{[U]}{[I]}}.[t]}{\cancel{\frac{[U]}{[I]}}} = [t]$

D'où : τ *est homogène à un temps et s'exprime en seconde (s) .*

➢ **Détermination graphique de τ.**

Pratiquement, on utilise deux méthodes :

✓ *1ère méthode :*

On a : $i(t) = \frac{E}{R+r}(1 - e^{-t/\tau})$

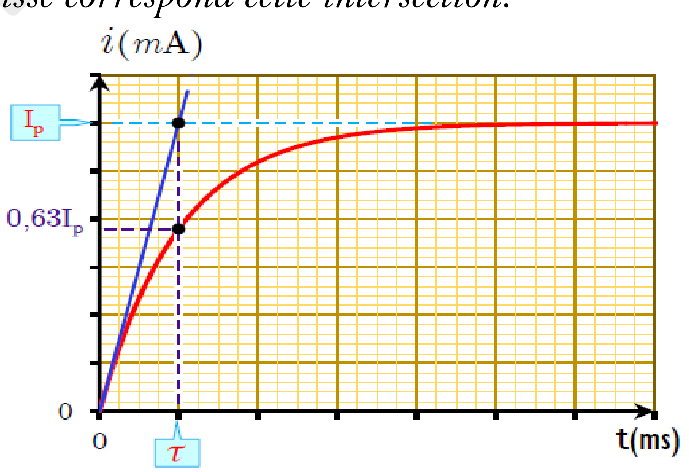
À $t = \tau$; *on a:* $i(t = \tau) = \frac{E}{R+r}(1 - e^{-1}) = 0,63\frac{E}{R+r} = 0,63.I_p$

$\Longrightarrow$ *On calcule* $i(\tau) = 0,63I_p$ *et on regarde à quelle abscisse correspond cette ordonnée.*

✓ *2ème méthode :*

La tangente de la courbe $i(t)$ *à l'instant* $t = 0$ *coupe l'asymptote* $I_p = \frac{E}{R+r}$ *au point d'abscisse* $t = \tau$.

$\Longrightarrow$ *On détermine l'intersection entre cette tangente et l'asymptote* $I_p = \frac{E}{R+r}$ *et on regarde à quelle abscisse correspond cette intersection.*



d) Expression de $u_L(t)$:

Pour une bobine de résistance interne r négligeable ;$(r \ll R \Longrightarrow R + r \approx R)$*; on a:*

$u_L = L.\frac{di}{dt}$

Avec : $i(t) = I_p(1 - e^{-t/\tau}) = I_p - I_p.e^{-t/\tau}$

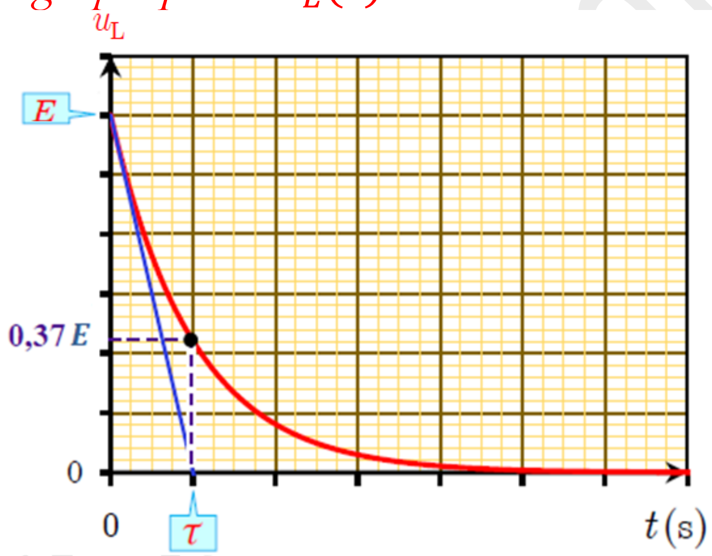
$\Rightarrow \quad \frac{di}{dt} = 0 + \frac{I_p}{\tau}.e^{-t/\tau} \quad$ *et :* $I_p = \frac{E}{R}$

$\Rightarrow \quad \frac{di}{dt} = \frac{E}{\cancel{R}}.\frac{\cancel{R}}{L}.e^{-t/\tau} = \frac{E}{L}.e^{-t/\tau}$

donc: $u_L = \cancel{L}.\frac{E}{\cancel{L}}.e^{-t/\tau}$

D'où : $u_L(t) = E.e^{-t/\tau}$

➤ *Représentation graphique de $u_L(t)$:*



Application n°② : *Exercice n° ② ; Série n°6*

الصفحة 5/8	NS31	الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا –الدورة العادية 2012 – الموضوع – مادة: الفيزياء والكيمياء - شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (الترجمة الفرنسية)

Exercice 2 : (5,25 pts) **Détermination des caractéristiques d'une bobine utilisée pour la sélection d'une onde modulée**

Les bobines sont utilisées dans des montages électriques pour sélectionner des signaux modulés .
Cet exercice a pour but de déterminer entre deux bobines (b) et (b') celle que l'on doit utiliser pour la sélection d'un signal donné modulé en amplitude .

1- Détermination de l'inductance L et de la résistance r de la bobine (b) .

0,5 | On réalise le montage expérimental représenté sur la figure 1 comprenant :
- Une bobine (b) d'inductance L et de résistance r ;
- Un conducteur ohmique (D) de résistance R ;
- Un générateur de tension (G) de force électromotrice E ;
- Un ampèremètre (A) de résistance négligeable ;
- Un interrupteur K .

A l'instant t = 0 , on ferme l'interrupteur K , et on visualise à l'aide d'un oscilloscope à mémoire les variations de la tension $u_{PQ}(t)$ entre les pôles du générateur (G) et de la tension $u_R(t)$ entre les bornes du conducteur ohmique (D).

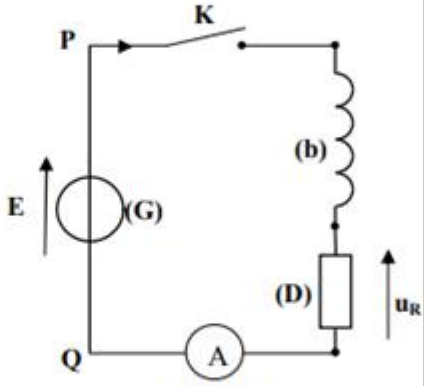


Figure1

On obtient les courbes ① et ② représentées sur la figure 2 .
La droite (T) représente la tangente à la courbe② à l'instant t=0 .
Dans le régime permanent , l'ampèremètre (A) indique la valeur I = 0,1A.

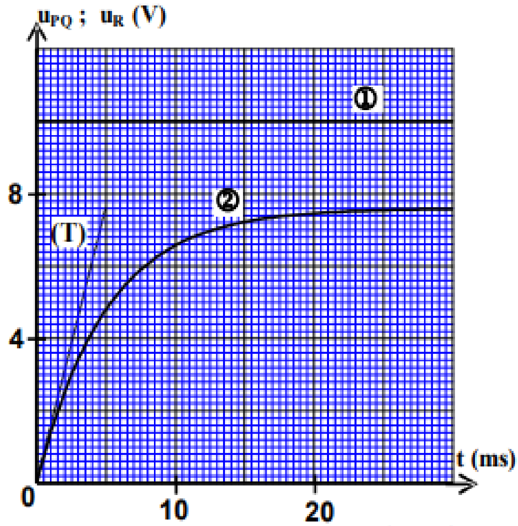


Figure2

0,5 **1.1-a-** Montrer que l'équation différentielle que vérifie la tension u_R s'écrit sous la forme :

$$L\cdot\frac{du_R}{dt}+(R+r).u_R-E.R=0.$$

0,5 **b-** Sachant que la solution de l'équation différentielle s'écrit sous la forme $u_R=U_0(1-e^{-\lambda.t})$, trouver l'expression des constantes U_0 et λ en fonction des paramètres du circuit .

0,75 **1.2-a-** Trouver l'expression de la résistance r de la bobine (b) en fonction de E , I et U_0. Calculer la valeur de r .

0,75 **b-** Exprimer $\left(\frac{du_R}{dt}\right)_0$, dérivée de la tension u_R par rapport au temps à l'instant t=0, en fonction de E, U_0, I, et L. En déduire la valeur de L.

2) *Réponse d'un dipôle RL à un échelon de tension descendant (Rupture du courant):*

Attention :

Si on ouvre l'interrupteur K, l'intensité i(t) varie de la valeur 1A (par exemple) à la valeur 0 pendent une durée de 1ms, donc pour une bobine d'inductance L=1H (par exemple) et de résistance interne r négligeable on a :

$$u_L(t)=L.\frac{di}{dt}=L.\frac{\Delta i}{\Delta t}$$

A.N :

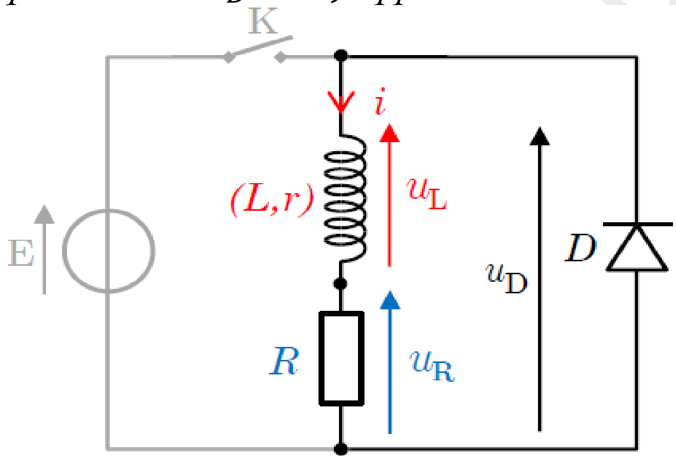
$$u_L(t)=1.\frac{0-1}{1.10^{-3}}=-10^3V=-1000V$$

Le signe (-) signifie que le courant i(t) dans le circuit change de sens

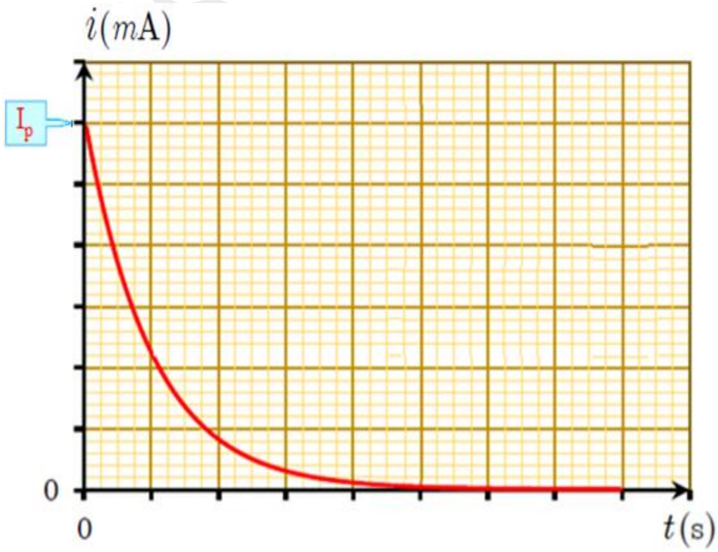
⟹*Si l'intensité varie rapidement dans le circuit , la valeur absolue de la tension* u_L *aux bornes de la bobine devient grande, et peut atteindre des valeurs extrêmement élevées, c'est* ***le phénomène de surtension.***

Remarque :

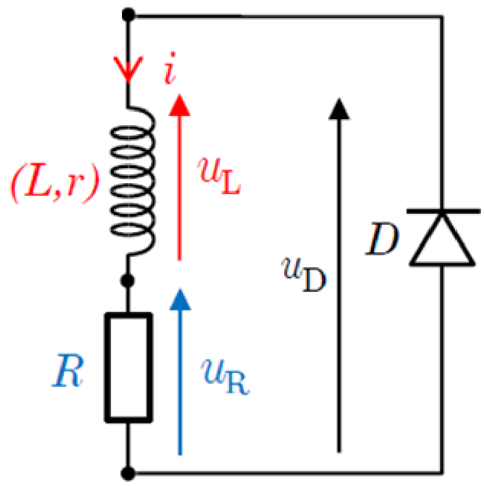
- ✓ *Le phénomène de surtension est exploité par exemple pour produire des étincelles entre les électrodes d'une bougie dans un moteur à essence, ou allumer des lampes à néon.*
- ✓ *Pour protéger le circuit contre le phénomène de surtension on utilise une diode (supposée idéale* $u_D = 0$*) appelée diode de la roue libre :*



On obtient le graphe ci-dessous, représentant l'évolution de l'intensité i *en fonction de temps :*



a) Equation différentielle du circuit :



On a d'après la loi d'additivité des tensions :

$$u_L + u_R = 0$$

Et on a d'après la loi d'Ohm : $u_R = R.i$

Et on sait que : $u_L = L.\frac{di}{dt} + r.i$

Puis on remplace dans l'équation (1) :

$$L.\frac{di}{dt} + r.i + R.i = 0$$

Soit :

$$L.\frac{di}{dt} + (R + r).i = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\frac{L}{R+r}.\frac{di}{dt} + i = 0}$$

L'équation différentielle du circuit

Qui peut s'écrire aussi sous la forme :

$$\boxed{\tau.\frac{di}{dt} + i = 0}$$

Avec : $\tau = \frac{L}{R+r}$

b) Résolution de l'équation différentielle :

La solution de l'équation différentielle précédente s'écrit sous la forme :

$i(t) = A.e^{-\alpha t}$

Avec A et α deux constante à déterminer ;

On a : $i(t) = A.e^{-\alpha t}$

Donc : $\frac{di}{dt} = -\alpha.A.e^{-\alpha t}$

Puis on remplace dans l'équation différentielle précédente ; on obtient :

$-\tau\alpha.A.e^{-\alpha t} + A.e^{-\alpha t} = 0$

$\Longrightarrow A.e^{-\alpha t}(1 - \tau\alpha) = 0$

c.à.d. que :

$$1 - \tau\alpha = 0 \quad \Longrightarrow \quad \alpha = \frac{1}{\tau} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{i(t) = A.e^{-t/\tau}}$$

Pour déterminer A on utilise les conditions initiales $(t = 0)$;

$\rightarrow$ A $t = 0$; la bobine étant chargé, et on a : $i(t = 0) = I_0 = \frac{E}{R+r}$

D'autre part, la forme de la solution, à $t = 0$ *nous donne :*

$i(t=0) = A.e^0 = A$

Donc : $A = I_0 = \frac{E}{R+r}$

D'où :

$$\boxed{i(t) = I_0.e^{-t/\tau}}$$

c) Détermination graphique de τ.

Pratiquement, on utilise deux méthodes :

✓ *1ère méthode :*

On a : $i(t) = I_0.e^{-t/\tau}$

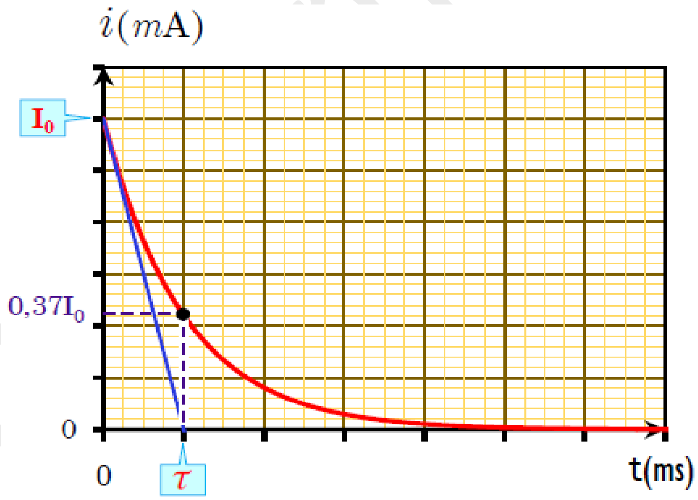
À $t = 0$; *on a:* $i(t=\tau) = I_0.e^{-1} = 0{,}37I_0$

$\Longrightarrow$ *On calcule* $i(\tau) = 0{,}37I_0$ *et on regarde à quelle abscisse correspond cette ordonnée.*

✓ *2ème méthode :*

La tangente de la courbe $i(t)$ *à l'instant* $t = 0$ *coupe l'axe des abscisses à* $t = \tau$.

$\Longrightarrow$ *On détermine l'intersection entre cette tangente et l'axe des abscisses (axe de temps) cette intersection donne directement la valeur de* τ.



d) Expression de $u_L(t)$:

Pour une bobine de résistance interne r négligeable ;$(r \ll R \Longrightarrow R + r \approx R)$ *; on a :* $u_L = L.\frac{di}{dt}$

Avec : $i(t) = I_0.e^{-t/\tau}$

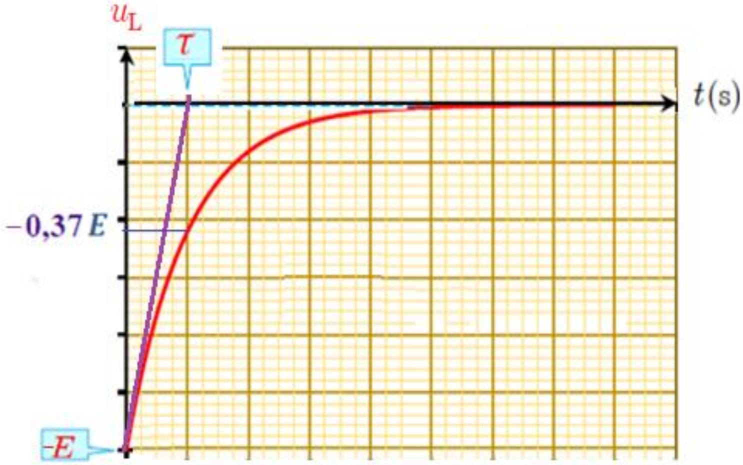
$\Longrightarrow \quad \frac{di}{dt} = -\frac{I_0}{\tau}.e^{-t/\tau} \quad$ *et :* $I_0 = \frac{E}{R}$

$\Longrightarrow \quad \frac{di}{dt} = -\frac{E}{\cancel{R}}.\frac{\cancel{R}}{L}.e^{-t/\tau} = -\frac{E}{L}.e^{-t/\tau}$

$donc: u_L = \cancel{L}(-\frac{E}{\cancel{L}}.e^{-t/\tau})$

D'où : $u_L(t) = -E.e^{-t/\tau}$

➤ *Représentation graphique de* $u_L(t)$ *:*



Application n°3 : Exercice n° 3 ; Série n° 6

الصفحة 4/8	NS30F	الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا – الدورة العادية 2018 – الموضوع – مادة: الفيزياء والكيمياء – شعبة العلوم الرياضية "أ" و"ب" – خيار فرنسية	

Exercice 2 : Electricité (5 points)

Cet exercice se propose d'étudier :
- la réponse d'un dipôle RC à un échelon de tension ;
- la réponse d'un dipôle RL à un échelon de tension ;
- la résonance en intensité d'un circuit RLC série.

I-Réponse d'un dipôle RC à un échelon de tension

On réalise le montage représenté sur le schéma de la figure1. Ce montage comporte :
- un générateur de tension G de force électromotrice E ;
- un conducteur ohmique de résistance $R = 2\,k\Omega$;
- un condensateur de capacité C initialement déchargé ;
- un interrupteur K .

A l'instant t=0 on ferme K. On note u_C la tension aux bornes du condensateur.

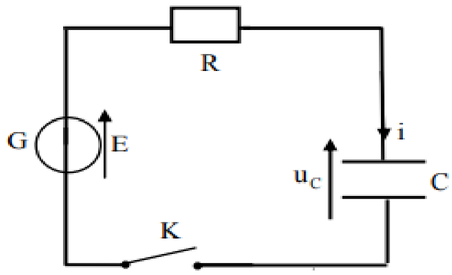


Figure 1

La courbe de la figure2 représente les variations de $\frac{du_C}{dt}$ en fonction de u_C .

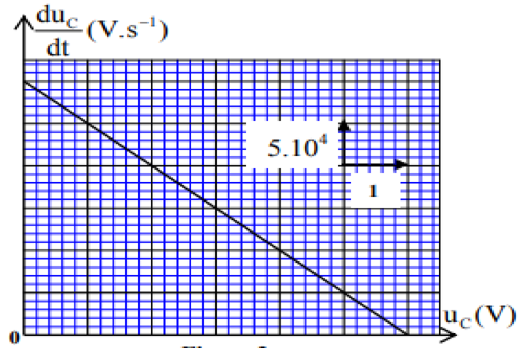


Figure 2

0,25 **1-** Etablir l'équation différentielle vérifiée par u_C .

0,5 **2-** Déterminer la valeur de E et vérifier que $C = 10\,nF$.

0,25 **3-** On définit le rendement énergétique de la charge du condensateur par $\rho = \frac{E_e}{E_g}$ avec E_e l'énergie emmagasinée par le condensateur jusqu'au régime permanent et $E_g = C.E^2$ l'énergie fournie par le générateur G.
Déterminer la valeur de ρ.

II- Réponse d'un dipôle RL à un échelon de tension

On réalise le montage, représenté sur le schéma de la figure 3, comportant :

-un générateur de f.e.m. $E = 6V$;

-deux conducteurs ohmiques de résistance R_1 et $R_2 = 2k\Omega$;

-une bobine (b) d'inductance L et de résistance $r = 20\Omega$;

-un interrupteur K ;

- une diode D idéale de tension seuil $u_S = 0$.

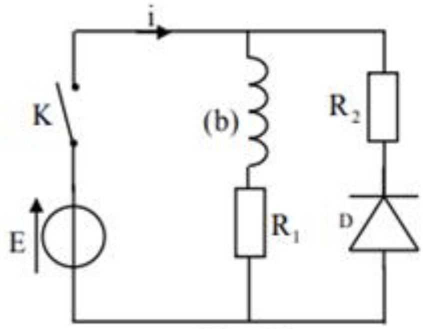


Figure 3

1- On ferme l'interrupteur K à l'instant de date $t = 0$. Un système d'acquisition informatisé adéquat permet de tracer la courbe représentant l'évolution de l'intensité du courant i(t) dans le circuit (figure 4) .La droite (T) représente la tangente à la courbe à $t = 0$.

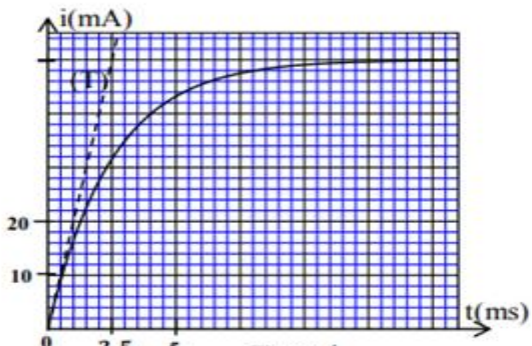


Figure 4

0,25 **1-1-**Etablir l'équation différentielle vérifiée par i(t).

0,5 **1-2-**Déterminer la valeur de la résistance R_1 et vérifier que la valeur de l'inductance de la bobine est $L = 0,3H$.

0,5 **1-3-**Lorsque le régime permanent est établi, calculer la tension aux bornes de la bobine.

2-Le régime permanent étant atteint, on ouvre K. On prend l'instant d'ouverture de K comme nouvelle origine des dates($t = 0$).

0,5 **2-1-** Quelle est la valeur de l'intensité du courant juste après l'ouverture de K ? justifier la réponse.

0,75 **2-2-**En se basant sur l'équation différentielle vérifiée par i(t) lors de la rupture du courant, déterminer à l'instant $t = 0$, la valeur de $\frac{di(t)}{dt}$ et celle de la tension aux bornes de la bobine.

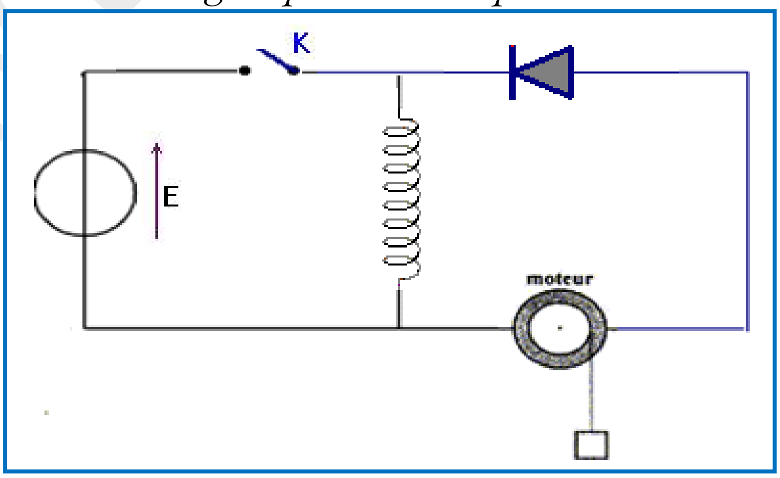
0,25 **3-** Justifier le rôle de la branche du circuit formé par la diode et le conducteur ohmique de résistance R_2 dans le circuit au moment de l'ouverture de l'interrupteur K .

III) Energie emmagasinée par une bobine.

1) Mise en évidence expérimentale :

a) Expérience :

On considère le montage expérimental représenté ci-dessous ;



b) Observation :

- ✓ *Quand on ferme l'interrupteur K, un courant électrique traverse la bobine. Le moteur ne fonctionne pas car la diode polarisée en sens inverse, empêche le courant de passer.*
- ✓ *Quand on ouvre l'interrupteur K, le moteur tourne, et l'objet de masse m s'élève pendant un court instant : seule la bobine peut lui fournir de l'énergie puisque le générateur est hors circuit, et la diode est passante.*

c) *Conclusion :*

Pendant la fermeture du circuit la bobine **emmagasine** *de l'énergie sous forme magnétique, qu'elle* **restitue** *dés l'ouverture du circuit.*

2) Expression de l'énergie emmagasinée par la bobine :

L'énergie magnétique $E_m(t)$ emmagasinée à l'instant t par une bobine d'inductance L, quand elle est traversée par un courant $i(t)$, s'exprime par la relation :

$$\boxed{E_m(t) = \frac{1}{2} L.i^2(t)}$$

Avec :

$E_m(t)$ en Joule (J)

L en Henry (H)

$i(t)$ en Ampère (A)

$*$) Démonstration :

La puissance magnétique P_m reçue par la bobine est :

$P_m = u_L . i$ *avec* $u_L = L.\frac{di}{dt}$ *(pour une bobine idéale)*

$\Longrightarrow P_m = L.i.\frac{di}{dt} = \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}L.i^2)$ (1)

D'autre part la puissance magnétique P_m reçue par la bobine est la dérivée par rapport au temps de l'énergie magnétique emmagasinée E_m.

$P_m = \frac{dE_m}{dt}$ (2)

De (1) et (2) on déduit que : $E_m = \frac{1}{2}L.i^2 + k$

Pour déterminer k on utilise les conditions initiales $(t = 0)$;

$\rightarrow$ *A* $t = 0$; *la bobine était déchargé, et on a :* $i(t = 0) = 0$

Donc $k = 0$.

D'où : $E_m(t) = \frac{1}{2}L.i^2(t)$

Remarque :

- ✓ *En régime permanent* $(t \to \infty)$; $i = I_0$, *donc :* $E_m = \frac{1}{2} L.I_0{}^2$
- ✓ *A* $t = \tau$, *on a* $i(t = \tau) = 0{,}63 I_0$, *donc :* $E_m = \frac{1}{2} L.(0{,}63 I_0)^2$