2. Bac 2014 session de rattrapage

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{n+1} = \dfrac{5u_n - 4}{1+u_n} \ ; \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$.

1. Démontrer par récurrence que : $u_n > 2$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$ . ... (0,75)

2. On considère la suite (v_n) définie par : $v_n = \dfrac{3}{u_n - 2}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

   a. Montrer que : $v_{n+1} = \dfrac{1+u_n}{u_n - 2}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$, puis montrer que la suite (v_n) est arithmétique de raison 1 . ... (1)

   b. Ecrire v_n en fonction de n , puis en déduire que $u_n = 2 + \dfrac{3}{n}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$ . ... (0,75)

   c. Déterminer : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ . ... (0,5)

3. Bac 2015 session normale (fuite الذى تم تسريبه)

8. Bac 2017 session normale

III. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \sqrt{3}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1. Montrer par récurrence que : $1 \leq u_n \leq 2$ pour tout n de . ... (0,5)
2. Montrer que la suite (u_n) est décroissante (on peut utiliser le résultat de la question II 4) c-) ...(0,5)
3. En déduire que (u_n) est convergente .et déterminer la limite de la suite (u_n) . ... (0,75)

Les résultats de quelques questions précédentes : $f(x) = x + \left(1 - \frac{2}{x}\right)\ln x$.

- **La fonction est décroissante sur $]0,1]$ et croissante sur $[1,+\infty[$.**
- **la question II 4) c- : $f(x) < x$ pour tout x de $[1,2]$, position relative de la courbe (C) et la droite (D) d'équation $y = x$ sur $[1,2]$.**

x	1		2
$f(x)-x$	0	$-$	0
		(C) est au dessous de (D)	
Position relative de (C) et (D)	(C) et (D) se coupent		(C) et (D) se coupent

Tableau de variation de f est :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$f(1)=1$	↗ $+\infty$

$f(x)$	$\searrow \quad \nearrow$ $f(0)=0$

II. bac 2018 session de rattrapage

III. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = e$ et $u_{n+1} = f(u_n)$

1. Montrer par récurrence que : $1 \leq u_n \leq e$ pour tout n de . ... (0,75)

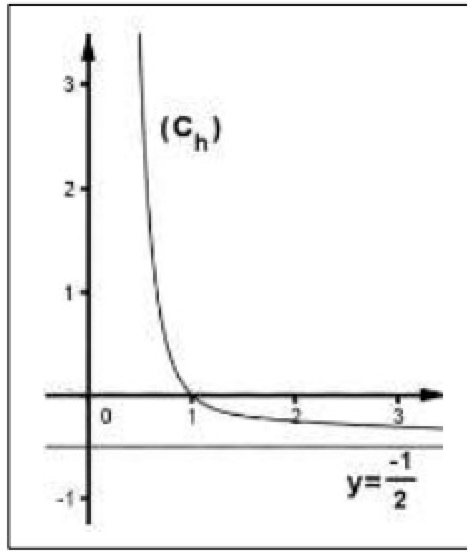
2. Montrer que la suite (u_n) est décroissante (on pourra utiliser le résultat de la question III 1) b-) .
.... (0,75)

3. En déduire que (u_n) est convergente .et déterminer sa limite . ... (0,75)

Les résultats de quelques questions précédentes :

$$f(x) = x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2x^2} + \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 .$$

- La fonction est décroissante sur $]0,1]$ et croissante sur $[1,+\infty[$.
- la question III 1) b - $h(1)=0$ avec $h(x)=f(x)-x$
  d'près la figure ci-contre qui la représentation graphique
  de la fonction h on détermine le de h et en déduire pour tout x
  de $[1,+\infty[$ on a $f(x)<x$



x	0		1		$+\infty$
$h(x)=f(x)-x$	‖	+	0	−	

Tableau de variation de f est :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	−	0	+	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	$f(1)=1$	$\nearrow$	$+\infty$

Exercice1:

Soit (u_n) la suite définie par :

$$(\forall n \in IN);\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3 \qquad et \qquad u_0 = 2$$

1) Calculer u_1 et u_2 .

2) Montrer que : $(\forall n \in IN);\ u_n < 6$.

3) Etudier la monotonie de (u_n) .

4) Soit la suite (v_n) définie sur IN par: $v_n = u_n - 6$

- **a)** Calculer v_0 et v_1 .
- **b)** Montrer que (v_n) est une suite géométrique .
- **c)** Exprimer v_n en fonction de n .
- **d)** En déduire u_n en fonction de n.

5) Exprimer S_n et w_n en fonction de n :

$$S_n = v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_n$$

$$w_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$$

6) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$; $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$; $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$ *et* $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n$

Exercice4:

Soit (u_n) une suite définie par:

$$u_0 = 2 \quad et \quad u_{n+1} = 2 - \frac{1}{u_n} \quad avec\ n \in IN$$

1) **a)** Montrer que : $(\forall n \in IN);\ u_n > 1$.

b) Etudier la monotonie de la suite (u_n).

2) Soit (v_n) une suite tel que : $v_n = 3 + \frac{1}{u_n - 1}$

a) Montrer que la suite (v_n) est arithmétique dont-on précisera son premier terme et sa raison.

b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

c) Déterminer la limite de (u_n).

Exercice 5 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = \sqrt[3]{\dfrac{2}{7}} \\ u_{n+1} = \sqrt[3]{\dfrac{u_n^3+1}{8}} \end{cases}$; $(\forall n \in \mathbb{N})$.

① - Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$: $u_n \succ \sqrt[3]{\dfrac{1}{7}}$.

② - Montrer $(\forall n \in \mathbb{N})$: $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \prec 1$, Conclure.

③ - On pose : $(\forall n \in \mathbb{N})$: $v_n = \dfrac{7}{8}u_n^3 - \dfrac{1}{8}$.

a - Montrer que (v_n) est une suite géométrique et déterminer sa raison .

b - Calculer (v_n) puis (u_n) en fonction de n.

④ - Calculer : $\lim\limits_{n\mapsto\infty} u_n$.

⑤ - Calculer la somme : $S_n = u_0^3 + u_1^3 + ... + u_n^3$ en fonction n.

Exercice 5 :

Soit f la fonction numérique d'une variable réelle x définie par: $f(x)=\sqrt[3]{2x^2-x^3}$.

①- Déterminer D_f , puis calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

②- Montrer (Δ) d'équation $y=-x+\frac{2}{3}$ est une asymptote oblique à la courbe $(\mathscr{C}_f)$.

③ - Etudier la dérivabilité de f en 2 à gauche et en 0 et interpréter le résultat graphiquement.

④ - Calculer $f'(x)$ pour tout $x\in D_f-\{0,2\}$, puis Dresser le tableau de variation de f.

⑤ - Tracer $(\mathscr{C}_f)$ et (Δ) dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

⑥ - Soit g la restriction de f à l'intervalle $I=\left[0;\frac{4}{3}\right]$.

Montrer que g réalise une bijection de I sur un intervalle J à déterminer. et calculer $(g^{-1})'(1)$

Exercice 3 :

Soit f la fonction numérique d'une variable réelle x définie par: $f(x) = x\left(\sqrt{x} - 2\right)^2$

① - a - Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f .

b - Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

② - Etudier la dérivabilité de f en 0 à droite et interpréter le résultat graphiquement.

③ - a - Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in D_f - \{0\}$.

b - Etudier les variations de f.

④ - a - Calculer $f''(x)$ pour tout $x \in D_f - \{0\}$.

b - Etudier la concavité de la courbe $(\mathscr{C}_f)$ et déterminer ce point d'inflexion.

⑤ - Etudier les branches infinie de la courbe $(\mathscr{C}_f)$.

⑥ - Tracer $(\mathscr{C}_f)$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

⑦ - Soit g la restriction de f à l'intervalle $[4;+\infty[$.

a - Montrer que la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer .

b - Calculer $(g^{-1})'(9)$.

c - Calculer $(\forall x \in J)$: $g^{-1}(x)$.

d - Tracer $(\mathscr{C}_{g^{-1}})$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

5 Les branches infinies

- **Les branches infinies**
  - $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$
    - $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a \neq 0$
      - $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - ax) = b$
        - la droite $y = ax + b$ est une asymptote oblique
      - $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - ax) = \infty$
        - (C_f) admet une branche parabolique suivant $(D) : y = ax$
    - $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$
      - (C_f) admet une branche parabolique suivant (OX)
    - $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \infty$
      - (C_f) admet une branche parabolique suivant (OY)
  - $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \beta$
    - la droite $x = \beta$ est une asymptote horizontale
  - $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \infty$
    - la droite $x = \alpha$ est une asymptote verticale

La droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $\pm\infty$ $\iff \lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x) - (ax + b)) = 0$

Attention ⚠

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x) - ax) = \pm\infty \not\Rightarrow$ (C_f) admet une branche parabolique suivant La droite d'équation $y = ax$ au voisinage de $\pm\infty$