Professeur : RACHID FANIDI	Devoir Surveillé 02-S1-
Lycée AL Massira EL Khadraa Tiznit	Modelle G
Classe : 2BAC PC-SVT-STE.	Durée : 2h30min

13pts

EXERCICE 01

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-\infty;3]$ par : $f(x)=x\sqrt{3-x}$

Et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1.25pts 1)Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ puis interpréter le résultat obtenu géométriquement.

1pts 2)Etudier la dérivabilité de la fonction f à gauche en 3 puis donner une interprétation géométrique au résultat obtenu.

0.75pts 3)a-Montrer que pour tout $x\in]-\infty;3[: f'(x)=\dfrac{3(2-x)}{2\sqrt{3-x}}$.

1pts b-Etudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f.

0.5pts c-Donner l'équation du tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse -1.

0.5pts 4)a-Montrer que pour tout $x\in]-\infty;3[: f(x)-x=\dfrac{x(2-x)}{1+\sqrt{3-x}}$.

0.75pts b-En déduire la position relative de la courbe (C_f) et la droite (D) d'équation $y=x$

1pts 5)Tracer la droite (D) et la tangente (T) et la courbe (C_f) dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

6)Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I=]-\infty;2]$.

0.5pts a-Montrer que g admet une fonction g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

0.75pts b-Montrer que g^{-1} est dérivable en -2 puis calculer $(g^{-1})'(-2)$.

0.5pts c-Tracer $(C_{g^{-1}})$ dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

7)Soit la fonction numérique h définie sur $[-3;3]$ par : $h(x)=f(|x|)$.

0.5pts a-Montrer que h est paire.

0.75pts b-Tracer la courbe (C_h) dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

0.5pts 8)a-Vérifier que pour tout $x\in]-\infty;3] : f(x)=3\sqrt{3-x}-\sqrt{(3-x)^3}$.

1pts b-Déterminer tous les fonctions primitives de f sur $]-\infty;3]$.

0.5pts c-Déterminer la fonction primitive F de f sur $]-\infty;3]$ telle que $F(2)=0$.

9)On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0=1$ et $u_{n+1}=f(u_n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

1pts a-Montrer par récurrence : $(\forall n\in\mathbb{N});0\le u_n\le 2$.

0.75pts b-Montrer que la suite (u_n) est croissante(on pourra utiliser la question2-b) et qu'elle est convergente.

0.75pts c-Déterminer la limite de la suite (u_n).

7pts	EXERCICE 02
	On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{\sqrt{3}}{4}u_n + \frac{4-\sqrt{3}}{4}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
1.5pts	1)Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N});u_n \succ 1$.
0.75pts	2)a-Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = \frac{\sqrt{3}-4}{4}(u_n - 1)$
0.75pts	b-En déduire que la suite (u_n) est décroissante et qu'elle est convergente.
	3)On pose $v_n = u_n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
1pts	a-Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{\sqrt{3}}{4}$ et calculer v_0 .
0.5pts	b-Exprimer v_n en fonction de n .
1pts	c-En déduire que $(\forall n \in \mathbb{N});u_n = 1 + \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^n$ puis calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n$.
	5)On pose $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
1pts	a-Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = n + \frac{4}{13}\left(4+\sqrt{3}\right)\left[1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^n\right]$
0.5pts	b-Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} S_n$.