LE LOGARITHME

Définition

✓ ln (logarithme népérien) est la primitive de $x \to \frac{1}{x}$ sur $]0,+\infty[$ et qui s'annule en 1

$ln'(x) = \frac{1}{x} \quad \forall x \in]0,+\infty[$ $\qquad ln(1) = 0$

propriétés

✓ ln est une fonction définie ,continue et dérivable sur $]0,+\infty[$

✓ ln est une fonction strictement croissante sur $]0,+\infty[$

- $ln(x) > ln(y) \iff x > y$
- $ln(x) = ln(y) \iff x = y$
- $ln(x) > 0 \iff x > 1$
- $ln(x) < 0 \iff 0 < x < 1$

x	0		1		$+\infty$
$ln(x)$	||	-	0	+	

Propriétés algébriques

($x, y \in]0,+\infty[$)

- $ln(xy) = ln(x) + ln(y)$
- $ln\left(\frac{x}{y}\right) = ln(x) - ln(y)$
- $ln\left(\frac{1}{x}\right) = -ln(x)$
- $ln(x^r) = r\,ln(x)$ $\quad r \in \mathbb{Q}$

Le nombre e

$ln(e) = 1 \qquad e \approx 2,71 \qquad ln(e^r) = r \qquad r \in \mathbb{Q}$

$ln(x) = r \iff x = e^r$

Les limites :

$\lim_{x\to 0^+} ln(x) = -\infty$	$\lim_{x\to +\infty} ln(x) = +\infty$
$\lim_{x\to 0^+} x\,ln(x) = 0^-$	$\lim_{x\to +\infty} \frac{ln(x)}{x} = 0^+$
$\lim_{x\to 0^+} x^n ln(x) = 0^- \quad n \in \mathbb{N}^*$	$\lim_{x\to +\infty} \frac{ln(x)}{x^n} = 0^+ \quad n \in \mathbb{N}^*$
$\lim_{x\to 0} \frac{ln(x+1)}{x} = 1$	$\lim_{x\to 1} \frac{ln(x)}{x-1} = 1$

La dérivation :

Si u est dérivable sur un intervalle I et ne s'annule pas sur I alors la fonction $x \to ln|u(x)|$ est dérivable sur I et on a : $(ln|u(x)|)' = \frac{u'(x)}{u(x)}$

La fonction logarithme de base a :

Définition	$log_a(x) = \frac{ln(x)}{ln(a)}$ avec a un réel strictement positive et différent de 1
Résultats	• $log_a(a) = 1$ • $log_e(x) = ln(x)$ • $log_a(a^r) = r$
Logarithme	Est La fonction logarithme de base 10 , on la note log

Exercice1 **écrire en fonction de les** $\ln 5$ **et** $\ln 2$ **expressions suivantes**

$A = \ln 100$ ، $C = \ln \frac{8}{25}$ ، $D = \ln 10 \times \ln(5^3)$ ، $B = \ln \frac{1}{125}$

Exercice 2 **résoudre les équations suivantes**

1. $\ln(3x + 10) = 0$
2. $\ln(4x - 1) = 0$
3. $\ln(x + 3) = 1$
4. $\ln(5) + 2\ln(x) = \ln(20)$
5. $\ln(2x - \sqrt{3}) = \ln(\sqrt{2 - \sqrt{3}}) + \ln(\sqrt{2 + \sqrt{3}})$
6. $\ln(x^2) = \ln(2x - 1)$
7. $2\ln(x - 1) = -\ln(\frac{1}{x}) + 2$
8. $\ln(\frac{1}{x - 1}) + \ln(x) = 1$
9. $\ln^2(x) + \ln(x) - 6 = 0$
10. $\ln^2(x - 1) - \frac{5}{2}\ln(x - 1)^2 + 4 = 0$

$\left(x-4\right)$

Exercice 4 calculer les limites suivantes

$$\lim_{x\to 0^+} x(\ln x)^3 \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{(\ln x)^{10}}{x} \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(3x+1)}{2x}$$

Exercice 5 on considère la fonction

Exercice 3 résoudre les inéquations suivantes

1. $2\ln(x-3)-1 \leq 0$
2. $\ln(-x+2) > 1$
3. $\ln(5-x) < \ln(x+2)$
4. $\ln(2x-1)-2\ln(x-3) < 0$
5. $\ln(2x^2-x-1) \geq 0$

Exercice 1:

Soit la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{2} - \ln x$

On note (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$

1) a/ Calculer $\lim_{x\to 0^+} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

b/ Calculer $\lim_{x\to +\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2) Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f

3) a/ Montrer que f réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$

b/ Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α tel que $1,6 < \alpha < 1,7$

4) Tracer dans un même repère les deux courbes (C_f) et $(C_{f^{-1}})$.

5) Soit la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x) = x - x\ln x$

a/ Montrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$, $g'(x) = -\ln x$

b/ Déterminer une primitive F de f qui s'annule en 1 sur $]0,+\infty[$

c/ Calculer le réel $F(1) - F(e)$

Exercice 2:

Soit la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x) = 2x^2 + 1 - \ln x$

1) On donne ci-dessous le tableau de variation de g

x	0		$\frac{1}{2}$		
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$g(\frac{1}{2})$	$\nearrow$	$+\infty$

Calculer $g(\frac{1}{2})$

2) En déduire que pour tout x de $]0,+\infty[$ on a : $g(x) > 0$
3) On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = 2x + 1 + \frac{\ln x}{x}$.

On note (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé ($o, \vec{i}, \vec{j}$)

a/ Calculer $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim_{x\to +\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement ces résultats

b/ Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

c/ Dresser le tableau de variation de f

4) a/ Montrer que f réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$

b/ Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α tel que $0,4 < \alpha < 0,5$

c/ En déduire le signe de f sur $]0,+\infty[$

5) a/ Montrer que la droite Δ d'équation $y = 2x + 1$ est une asymptote oblique à(C_f) au voisinage de $+\infty$

b/ Déterminer la position relative de Δ par rapport à (C_f)

6) Tracer dans un même repère la droite Δ , et les deux courbes(C_f) et $(C_{f^{-1}})$.

7) a/ Montrer que la fonction F définie sur $]0,+\infty[$ par $F(x) = x^2 + x + \frac{1}{2}(lnx)^2$

est une primitive de f sur $]0,+\infty[$

b/ Vérifier que $F(e) - F(1) = \frac{2e^2+2e-3}{2}$

Exercice 3:

Soit la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \frac{x+3+3\ln x}{x}$

On désigne par (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$

<u>(l'unité graphique est de 1cm)</u>

1) Montrer que $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 1$. Interpréter graphiquement ces résultats

2) a/ Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que $f'(x) = \frac{-3\ln x}{x^2}$

b/ Dresser le tableau de variation de f

3) a/ Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $]0,+\infty[$ une unique solution α

et que $0{,}3 < \alpha < 0{,}4$

b/ Tracer la courbe C_f dans la repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$

4) Soit la fonction F définie sur $]0,+\infty[$ par $F(x) = x + (3 + \frac{3}{2}\ln x)\ln x$

a/ Montrer que F est une primitive de f sur $]0 , +\infty[$

b/ Calculer le réel $F(1) - F(e)$

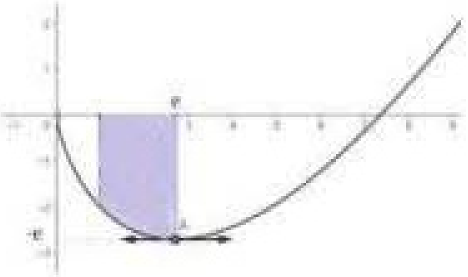
Exercice 4:

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$

Le graphique ci-contre représente une fonction f

définie sur $]0 , +\infty[$

- ✓ La tangente à (C_f) au point $A(e, -e)$ est horizontal
- ✓ (C_f) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction l'axe $(0,\vec{j})$



1) **<u>En utilisant les données et le graphique</u>**

a/ Déterminer : $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$

b/ Déterminer : $f(e)$ et $f'(e)$

c/ Dresser le tableau de variation de f

2) Soient a et b deux réels, on admet que pour tout $x \in]0 , +\infty[$, $f(x) = x(a\ln(x) + b)$.

a/ Montrer que pour tout $x > 0$,, $f'(x) = a\ln(x) + a + b$

b/ Déterminer alors a et b

3) Dans la suite de l'exercice, on pose $f(x) = x(\ln(x) - 2)$.