Barycentre

Exercice 1. ABC est un triangle avec E le milieu de $[AB]$, F le point tel que $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$, et G le point vérifiant $\overrightarrow{BG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

1. Faire une figure
2. Démontrer que les droites (CE), (BF) et (AG) sont concourantes.

Exercice 2. ABC est un triangle tel que $AB = 6, AC = 4$ et $BC = 5$. G est le centre de gravité de ABC.
Déterminer et construire (ζ) l'ensemble des points M dans chaque cas :

1. $\left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = 6$
2. $\left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right\| = \left\|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\|$
3. $\left\|\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\right\| = \left\|\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right\|$.

Exercice 3. Soient ABC un triangle et F le barycentre de $\{(A,1),(B,2),(C,1)\}$. Soient D le milieu de $[AC]$ et G le barycentre de $\{(A,5),(B,2),(C,-3)\}$.

1. Montrer que F est le milieu de $[BD]$.
2. Montrer que le quadrilatère $ACFG$ est un parallélogramme.
3. E est le milieu de $[AB]$. Montrer que E, F et G sont alignés.
4. Vérifier que $EF = \frac{1}{4}AC$.

Exercice 4. $ABCD$ un parallélogramme, E et F deux points tels que $\overrightarrow{AF} = k\overrightarrow{AB}$ et $(1-k)\overrightarrow{AE} = k\overrightarrow{AD}$ avec $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$.

1. Vérifier que C est un barycentre des points A, B et D en déterminant ses pondérations.
2. Montrer que C, E et F sont alignés.
3. Déterminer k pour que C soit le centre de $[EF]$.

Exercice 5. ABC un triangle. Soit E le barycentre de $(B,1)$ et $(C,-3)$ et soit F le barycentre de $(A,2)$ et $(B,1)$

1. Faire une figure.
2. Montrer que $(CF) \parallel (AE)$.

Exercice 6. On considère un triangle ABC du plan.

1. (a) Déterminer et construire le point G, barycentre de $\{(A,1),(B,-1),(C,1)\}$
   (b) Déterminer et construire le point G', barycentre de $\{(A,1),(B,5),(C,-2)\}$
2. (a) Soit J le milieu de $[AB]$. Exprimer $\overrightarrow{GG'}$ et $\overrightarrow{JG'}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ et en déduire l'intersection des droites (GG') et (AB).
   (b) Montrer que le barycentre I de$\{(B,2),(C,-1)\}$ appartient à (GG').
3. Soit D un point quelconque du plan. Soient O le milieu de $[CD]$ et K le milieu de $[OA]$.
   (a) Déterminer trois réels α, β et γ tels que K soit barycentre de $\{(A,\alpha),(D,\beta),(C,\gamma)\}$
   (b) Soit X le point d'intersection de (DK) et (AC). Déterminer les réels α' et γ' tels que X soit barycentre de $\{(A,\alpha'),(C,\gamma')\}$

Exercice 7. Soit ABC un triangle. Le point I est le symétrique de B par rapport à C. Le point J est le symétrique de C par rapport à A. Le point K est le symétrique de A par rapport à B. On obtient un nouveau triangle IJK.

1. Démontrer que A est le barycentre de $\{(I,2),(J,4),(K,1)\}$.
   Exprimer de même sans calculs B et C comme barycentres de I, J, K.
2. Soient P, Q, R les points d'intersection respectifs des droites (BC), (AC), (AB) avec les droites (KJ), (IK), (JI).
   (a) Démontrer que R est le barycentre de $\{(I,1),(J,2)\}$.
   (b) Énoncer les résultats analogues pour les points P et Q.
3. On donne le triangle IJK. Retrouver le triangle ABC.

Exercice 8. ABC un triangle et I un point tel que $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

1. Montrer que $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ et construire I.
2. Soit D le barycentre de $\{(A,-1),(B,2),(C,1)\}$, montrer que $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AI}$ et construire D.
3. (a) Construire les deux points E et F tels que $ACBE$ et $ADBF$ soient des parallélogramme.
   (b) Montrer que les points A, C et F sont alignés et que (EF) et (CD) sont parallèles.

Exercice 9. On considère un parallélogramme $ABCD$ et J le milieu du coté $[AC]$.
I et I' deux points tels que $\overrightarrow{AI'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.
Le point K est le quatrième point du parallélogramme $IAJK$. Soit M le barycentre de $(A,1)$, $(B,2)$ et $(C,3)$.

1. Exprimer comme barycentre de A, B et C chacun des points I, J et D.
2. Montrer les relations $\overrightarrow{KI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{KA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{KB}$ et $\overrightarrow{KJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{KA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{KC}$. En déduire une écriture du point K comme barycentre des points A, B et C.
3. Montrer que les droites (BJ), (CI) et (DK) sont concourantes en M.
4. Montrer que les quatre points M, I', K et D sont alignés.

TD-PRODUIT SCALAIRE DANS $\mathcal{V}_2$

Etude analytique -Applications : cercle

Exercice1 : dans Le plan ($\mathcal{P}$) est rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ Considérons les points $A(1;-3)$ et $B(3;7)$ et $C(-3;1)$

1)Montrer que le triangle ABC est rectangle en C

2)Calculer la surface du triangle ABC

Exercice2: dans Le plan ($\mathcal{P}$) est rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ Considérons les points $A(5;0)$ et $B(2;1)$ et $C(6;3)$

1) Calculer $\cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$ et $\sin\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$

2)en déduire une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$

Exercice3 : déterminer une équation cartésienne de la droite (D) qui passe par $A(0;1)$ et qui admet $\vec{n}(2;1)$ comme vecteur normal

Exercice4 :donner un vecteur normal a la droite (D) dans les cas suivants : 1)$(D): x-2y+5=0$

2)$(D): 2y-3=0$ 3)$(D): x-1=0$

Exercice5 : dans Le plan ($\mathcal{P}$) est rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ Considérons les points $A(-3;0)$ et $B(3;0)$ et $C(1;5)$

1)déterminer une équation cartésienne de la droite (D) perpendiculaire à la droite (AB) passant par C

2)déterminer une équation cartésienne de la droite (Δ) parallèle à la droite (AB) passant par C

Exercice6 : dans Le plan ($\mathcal{P}$) est rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ Considérons les points $A(1;2)$ et $B(-2;3)$ et $C(0;4)$

1)déterminer une équation cartésienne de la droite (D) médiatrice du segment $[AB]$

2)déterminer une équation cartésienne de la droite (Δ) la hauteur du triangle ABC passant par A

Exercice7 :(D) $2x+3y-1=0$ et $(D'): \frac{3}{2}x-y+4=0$

Etudier la position relative de (D) et (D')

Exercice8 : Soient la droite (D) d'équation : $(D): 3x+4y+5=0$

1)Déterminer les coordonnées du point H la projection orthogonale de O sur (D)

2)calculer La distance du point O à la droite (D)

3)Déterminer les coordonnées du point O' le symétrique de O par rapport à la droite (D)

Exercice9: dans Le plan ($\mathcal{P}$) est rapporté à un repère orthonormé et direct $\mathcal{R}\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ Considérons les points $A(1;-1)$ et $B(4;-1)$ et $C(-2;2)$

1) Calculer : $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}$ et $\det\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$

2)en déduire une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$

3)Calculer la surface du triangle ABC

4)déterminer une équation cartésienne de la hauteur du triangle ABC passant par A

5)déterminer une équation cartésienne de la bissectrice de l'angle $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$

Exercice10 : déterminer l'équation cartésienne du cercle de centre $\Omega(-1;2)$ et de rayon $r=3$

Exercice11 :Déterminer L'ensemble(E) dans les cas suivants :

1) (E): $x^2+y^2-x+3y-4=0$

2)(E): $x^2+y^2-6x+2y+10=0$

3) (E): $x^2+y^2-4x+5=0$

Exercice12 :Déterminer une équation du cercle de diamètre $[AB]$ avec $A(1;2)$ et $B(-3;1)$

Exercice13 : le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère $\mathcal{R}\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ orthonormé. Soient les points

$A(2;3)$ $B(0;1)$; $C(-4;5)$; $E(5;2)$ et $F(2;4)$

1)Ecrire l'équation du cercle circonscrit au Triangle ABC.

2)Ecrire l'équation du cercle circonscrit au triangle OEF

Exercice14: résoudre graphiquement le système :

$$(S)\begin{cases} x^2+y^2-2x-4y+\dfrac{11}{4}\prec 0 \\ x^2+y^2+2x-4\succ 0 \end{cases}$$

Exercice15 : résoudre graphiquement le système :

$$(S)\begin{cases} (1): x^2+y^2-4x\prec 0 \\ (2): x-y-1\succ 0 \end{cases}$$

Exercice16 : Etudier la position du cercle de centre $\Omega(1;2)$ et de rayon $R=2$ avec la droite d'équation $(D): x+y+2=0$

Exercice17 : Etudier la position du cercle $(\mathcal{C})$ de centre $\Omega(1;2)$ et de rayon $R=2$ avec la droite d'équation $(D): x-y+2=0$

Exercice18 ::Etudier la position du cercle $(\mathcal{C})$ de centre $\Omega(1;2)$ et de rayon $R=1$ avec la droite d'équation $(D): y=3$

Exercice19 : Soit $(\mathcal{C})$ le cercle d'équation :
$x^2+y^2-4x-2y+1=0$ (1)

1)Vérifier que $A(0;1)\in(C)$

2) Ecrire l'équation de la tangente au cercle $(\mathcal{C})$ en A.

Exercice20 :Déterminer l'*équation paramétrique du cercle* (C) de centre $\Omega(1;-2)$ et de rayon $r=\sqrt{2}$ avec $(\theta\in\mathbb{R})$

Exercice21 : Déterminer l'ensemble (C) des points $M\ (x\,;y\,)$ du plan tel que :

$\begin{cases} x=3+\sqrt{3}\cos\theta \\ y=1+\sqrt{3}\sin\theta \end{cases}$ avec $(\theta\in\mathbb{R})$

Exercice22 :le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère $\mathcal{R}\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ orthonormé. (C) l'ensemble des points $M\ (x\,;y\,)$ du plan tel que : $\begin{cases} x=2+2\cos\theta \\ y=2\sin\theta \end{cases}$ avec $(\theta\in\mathbb{R})$

1) montrer que (C) est *le cercle* (C) dont on déterminera de centre Ω et de rayon R et une équation cartésienne

2)soit le point $A(-1;0)$; montrer que A est à l'extérieur du cercle (C) et déterminer les équations des deux tangentes au cercle $(\mathcal{C})$ passant par A

3) déterminer les équations des deux tangentes au cercle $(\mathcal{C})$ et qui sont parallèles à la droite :
(D) : $3x-4y=0$

4)a)soit la droite (Δ) d'équation : $y=x$

Montrer que (Δ) coupe le cercle (C) en deux points à déterminer

4)b) déterminer graphiquement l'ensemble des points $M\ (x\,;y\,)$ du plan tel que : $\dfrac{x^2+y^2}{4}\leq x\leq y$

Exercice23:le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère $\mathcal{R}\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ orthonormé. Soient les points

$A(3;4)$ $B(4;1)$; $C(2;-3)$

1)montrer que les points A ; B et C sont non alignés

2)Ecrire l'équation du cercle (C) passant par A ; B et C

Exercice 24:le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère $\mathcal{R}\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ orthonormé. (C_m) l'ensemble des points $M\ (x\,;y\,)$ du plan tel que :

$(C_m): x^2+y^2-2mx+2y+2m=0$ avec m Paramètre réel

1)déterminer l'ensemble (C_1)

2) a)montrer que $\forall m\in\mathbb{R}-\{1\}$ (C_m) est *un cercle* dont déterminera le centre Ω_m et de rayon R_m

2) b) déterminer l'ensemble des centres Ω_m lorsque $m\in\mathbb{R}-\{1\}$

2) b) montrer que tous les *cercles* (C_m) passent par un point fixe I dont déterminera et tracer $(C_0);(C_2);(C_3)$

3) a) montrer que la droite (Δ) : $x=1$ est tangente A toutes les *cercles* (C_m)

3) b)soit $m\succ\dfrac{-3}{2}$ et $m\neq 1$ et le point $A(0;1)$

Vérifier que A est à l'extérieur des *cercles* (C_m) et que la droite (AI) n'est pas tangente aux *cercles* (C_m)