le produit scalaire

I. $\vec{u}(x,y)$ et $v(x',y')$

le produit scalaire $\vec{u}\cdot\vec{v} = x.x' + yy'$

- la norme d'un vecteur

  si $\vec{u}(x,y)$ ALors $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2}$

- $AB = \|\vec{AB}\| = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

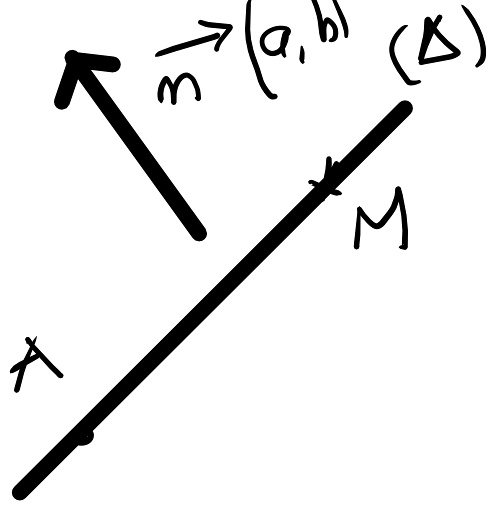
- $\cos(\vec{u},\vec{v}) = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|} = \dfrac{x.x'+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}.\sqrt{x'^2+y'^2}}$

- $\sin(\vec{u},\vec{v}) = \dfrac{\det(\vec{u},\vec{v})}{\sqrt{x^2+y^2}.\sqrt{x'^2+y'^2}} = \dfrac{\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}}{\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|}$

- la surface du Triangle

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}|\det(\vec{AB},\vec{AC})|$$

- L'equation d'une droite définie par un vecteur normal



$M(x,y) \in (D) \Leftrightarrow \vec{AM}\cdot\vec{n} = 0$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-x_A \\ y-y_A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0$

$$\boxed{a(x-x_A)+b(y-y_A)=0}$$

Explo : (D) passe par $A(3,2)$ et vecteur normale $\vec{n}(4,-2)$

$(D) : 4(x-3)-2(y-2)=0$

$\Leftrightarrow 4x-12-2y+4=0$

$4x-2y-8=0$

$2x-y-4=0$

• distance entre un point et une droite

$(D) : ax + by + c = 0$

$A(x_A, y_A)$

$$d(A, (D)) = \frac{|a \cdot x_A + b y_A + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Exemple : $(D) : 2x - y + 3 = 0$

$A(1, 2)$

$$d(A, (D)) = \frac{|2x_A - y_A + 3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}}$$

$$= \frac{|2 - 2 + 3|}{\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

Cercle

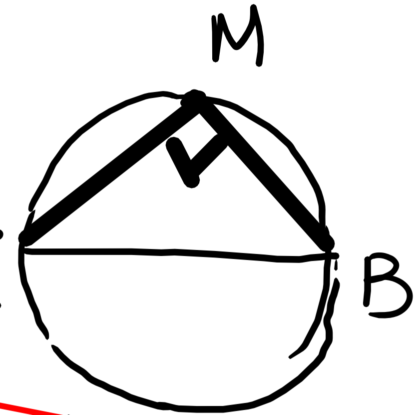
• Une équation du cercle de centre $\Omega(a, b)$ et de rayon R

$$M(x,y) \in (\mathscr{C}) \iff (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$$

• Une equation du cercle de diamètre $[AB]$

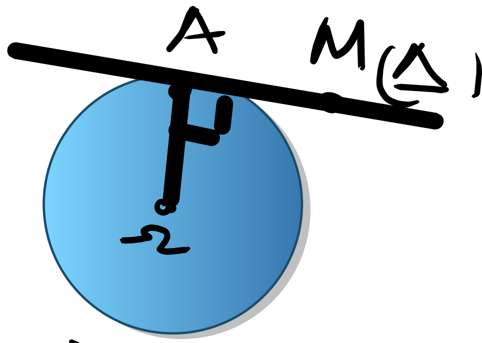
$$M(x,y) \in (C) \iff \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$$

$$\iff \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_B \\ y - y_B \end{pmatrix} = 0$$



$$\iff (x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) = 0$$

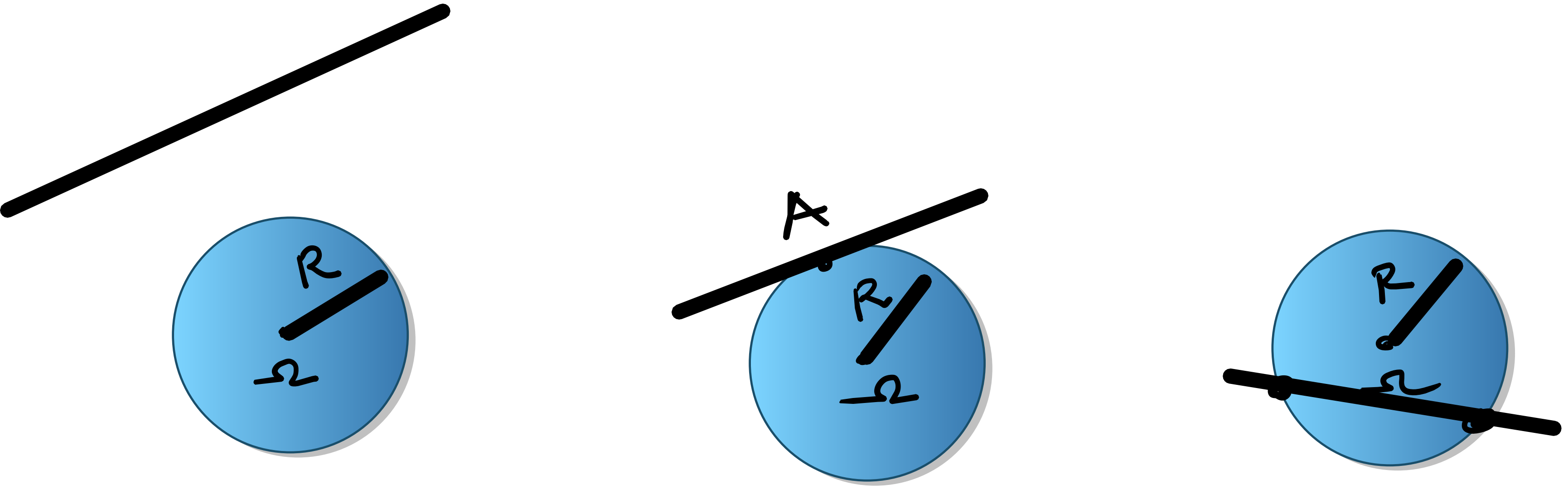
la tangente à un cercle



$$M(x,y) \in (\Delta) \iff \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{A\Omega} = 0$$

$$(x - x_A)(x_\Omega - x_A) + (y - y_A) \cdot (y_\Omega - y_A) = 0$$

Position relative d'une droite et un cercle



$d(\Omega,(D)) > R$

$(D) \cap (C) = \emptyset$

$d(\Omega,(D)) = R$

(D) tangente à (C)

$d(\Omega,(D)) < R$

(D) coupe (C) en 2 points

Déterminer les points d'inters

on résout

$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \\ ax + by + c = 0 \end{cases}$$

4pts	EXERCICE 02
	Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ on considère les points : $A(2;0)$; $B(1;\sqrt{3})$
1.5pts	1)Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{AB}$ et les distances AO et AB.
1.5pts	2)Calculer $\cos\left(\overline{\overrightarrow{AO};\overrightarrow{AB}}\right)$ et $\sin\left(\overline{\overrightarrow{AO};\overrightarrow{AB}}\right)$.
0.5pts	3)a-Déterminer la mesure principale de l'angle $\left(\overline{\overrightarrow{AO};\overrightarrow{AB}}\right)$.
0.5pts	b-En déduire la nature du triangle ABC.

9pts	EXERCICE 03
	Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ on considère les points : $A(-1;2)$; $B(3;-4)$
	Soit (C) l'ensemble des points M du plan vérifient : $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=-4$.
1.25pts	1)a-Montrer que : $x^2+y^2-2x+2y-7=0$ est une équation cartésienne de l'ensemble (C).
1.25pts	b-Montrer que (C) est un cercle de centre $\Omega(1,-1)$ et de rayon $R=3$.
0.5pts	2)a-Vérifier que $K(1;2)\in(C)$.
1pts	b-Donner une équation cartésienne de la droite tangente (D) au cercle (C) au point K.
0.75pts	3)a-Montrer que la droite (Δ) d'équation $x+y+3=0$ coupe le cercle (C) en deux points.
1.25pts	b-Déterminer les cordonnées des points d'intersection de la droite (Δ) et le cercle (C).
1.5pts	4)Résoudre graphiquement le système : $\begin{cases} x^2+y^2-2x+2y-7<0 \\ x+y+3>0 \end{cases}$.
0.5pts	5)a-Vérifier que le point $H(1;4)$ est situé à l'extérieur du cercle (C).
1pts	b-Donner les équations des tangentes au cercle (C) et qui passe par le point H.

$A(2,0)$, $B(1,\sqrt{3})$

1) $\overrightarrow{OA}(x_A-x_O, y_A-y_O)$

$\overrightarrow{OA}(2,0)$ d'ou $\overrightarrow{AO}(-2,0)$

et $\overrightarrow{AB}(1-2, \sqrt{3}-0)$

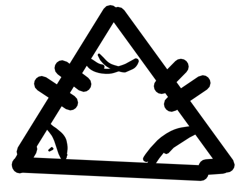
$\overrightarrow{AB}(-1,\sqrt{3})$

d'ou :

$\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{AB} = 2$

$AO = \|\overrightarrow{AO}\| = \sqrt{(-2)^2+0^2} = 2$

$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{1+3} = 2$



$\sin(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AB})$

$= \dfrac{\det(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AB})}{AO.AB}$

$= \dfrac{\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 0 & \sqrt{3} \end{vmatrix}}{4} = \dfrac{-2\sqrt{3}}{4}$

$= -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

2) $\cos(\overline{\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AB}}) = \dfrac{\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{AB}}{AO.AB} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

3) ⓐ on a $\cos(\overline{\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AB}}) = \frac{1}{2}$ et $\sin(\overline{\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AB}}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$(\overline{\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AB}}) \equiv -\dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$

4pts	EXERCICE 02
	Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ on considère les points : $A(2;0)$; $B(1;\sqrt{3})$
1.5pts	1)Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{AB}$ et les distances AO et AB.
1.5pts	2)Calculer $\cos(\overrightarrow{AO};\overrightarrow{AB})$ et $\sin(\overrightarrow{AO};\overrightarrow{AB})$.
0.5pts	3)a-Déterminer la mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{AO};\overrightarrow{AB})$.
0.5pts	b-En déduire la nature du triangle ABC.

9pts	EXERCICE 03
	Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ on considère les points : $A(-1;2)$; $B(3;-4)$
	Soit (C) l'ensemble des points M du plan vérifient : $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=-4$.
1.25pts	1)a-Montrer que : $x^2+y^2-2x+2y-7=0$ est une équation cartésienne de l'ensemble (C).
1.25pts	b-Montrer que (C) est un cercle de centre $\Omega(1,-1)$ et de rayon $R=3$.
0.5pts	2)a-Vérifier que $K(1;2)\in(C)$.
1pts	b-Donner une équation cartésienne de la droite tangente (D) au cercle (C) au point K.
0.75pts	3)a-Montrer que la droite (Δ) d'équation $x+y+3=0$ coupe le cercle (C) en deux points.
1.25pts	b-Déterminer les cordonnées des points d'intersection de la droite (Δ) et le cercle (C).
1.5pts	4)Résoudre graphiquement le système : $\begin{cases} x^2+y^2-2x+2y-7\leq 0 \\ x+y+3\geq 0 \end{cases}$.
0.5pts	5)a-Vérifier que le point $H(1;4)$ est situé à l'extérieur du cercle (C).
1pts	b-Donner les équations des tangentes au cercle (C) et qui passe par le point H.

$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$

$\Omega(a,b)$

R

$$M(x,y)\in(C) \iff \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=-4$$

$$\iff \begin{pmatrix} x+1 \\ y-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-3 \\ y+4 \end{pmatrix}=-4$$

$$\iff (x+1)(x-3)+(y-2)(y+4)=-4$$

$$\iff x^2-3x+x-3+y^2+4y-2y-8=-4$$

$$\iff x^2+y^2-2x+2y-7=0$$

b)

$$x^2+y^2-2x+2y-7=0$$

$$\iff (x^2-2x)+(y^2+2y)-7=0$$

$$\iff (x^2-2x+1)-1+(y^2+2y+1)-1-7=0$$

$$\iff (x-1)^2+(y+1)^2=9=3^2$$

donc le centre $\Omega(1,-1)$ et $R=\sqrt{9}=3$

4pts	**EXERCICE 02**
	Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ on considère les points : $A(2;0)$; $B(1;\sqrt{3})$
1.5pts	1)Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{AB}$ et les distances AO et AB.
1.5pts	2)Calculer $\cos(\overline{\overrightarrow{AO};\overrightarrow{AB}})$ et $\sin(\overline{\overrightarrow{AO};\overrightarrow{AB}})$.
0.5pts	3)a-Déterminer la mesure principale de l'angle $(\overline{\overrightarrow{AO};\overrightarrow{AB}})$.
0.5pts	b-En déduire la nature du triangle ABC.
9pts	**EXERCICE 03**
	Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ on considère les points : $A(-1;2)$; $B(3;-4)$
	Soit (C) l'ensemble des points M du plan vérifient : $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=-4$.
1.25pts	1)a-Montrer que : $x^2+y^2-2x+2y-7=0$ est une équation cartésienne de l'ensemble (C).
1.25pts	b-Montrer que (C) est un cercle de centre $\Omega(1;-1)$ et de rayon $R=3$.
0.5pts	2)a-Vérifier que $K(1;2)\in(C)$.
1pts	b-Donner une équation cartésienne de la droite tangente (D) au cercle (C) au point K.
0.75pts	3)a-Montrer que la droite (Δ) d'équation $x+y+3=0$ coupe le cercle (C) en deux points.
1.25pts	b-Déterminer les cordonnées des points d'intersection de la droite (Δ) et le cercle (C).
1.5pts	4)Résoudre graphiquement le système : $\begin{cases} x^2+y^2-2x+2y-7<0 \\ x+y+3>0 \end{cases}$.
0.5pts	5)a-Vérifier que le point $H(1;4)$ est situé à l'extérieur du cercle (C).
1pts	b-Donner les équations des tangentes au cercle (C) et qui passe par le point H.

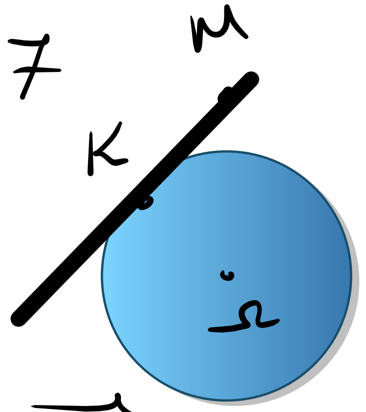
2)a)

On a : $x_K^2+y_K^2-2x_K+2y_K-7$

$= 1+4-2+4-7$

$=0$

donc $K\in(C)$



b) $M(x,y)\in(D) \iff \overrightarrow{KM}\cdot\overrightarrow{K\Omega}=0$

$\iff \begin{pmatrix}x-1\\y-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1-1\\-1-2\end{pmatrix}=0$

$\iff -3(y-2)=0$

$(D) : y-2=0$

3)a

$d(\Omega,(\Delta)) = \dfrac{|x_\Omega+y_\Omega+3|}{\sqrt{1+1}} = \dfrac{|1-1+3|}{\sqrt{2}}$

$= \dfrac{3}{\sqrt{2}} < R=3$

d'où (Δ) coupe (C) en 2 points

4pts	EXERCICE 02
	Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ on considère les points : $A(2;0)$; $B(1;\sqrt{3})$
1.5pts	1)Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{AB}$ et les distances AO et AB.
1.5pts	2)Calculer $\cos(\overrightarrow{AO};\overrightarrow{AB})$ et $\sin(\overrightarrow{AO};\overrightarrow{AB})$.
0.5pts	3)a-Déterminer la mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{AO};\overrightarrow{AB})$.
0.5pts	b-En déduire la nature du triangle ABC.

9pts	EXERCICE 03
	Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ on considère les points : $A(-1;2)$; $B(3;-4)$
	Soit (C) l'ensemble des points M du plan vérifient : $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=-4$.
1.25pts	1)a-Montrer que : $x^2+y^2-2x+2y-7=0$ est une équation cartésienne de l'ensemble (C).
1.25pts	b-Montrer que (C) est un cercle de centre $\Omega(1,-1)$ et de rayon $R=3$.
0.5pts	2)a-Vérifier que $K(1;2)\in(C)$.
1pts	b-Donner une équation cartésienne de la droite tangente (D) au cercle (C) au point K.
0.75pts	3)a-Montrer que la droite (Δ) d'équation $x+y+3=0$ coupe le cercle (C) en deux points.
1.25pts	b-Déterminer les cordonnées des points d'intersection de la droite (Δ) et le cercle (C).
1.5pts	4)Résoudre graphiquement le système : $\begin{cases} x^2+y^2-2x+2y-7<0 \\ x+y+3>0 \end{cases}$.
0.5pts	5)a-Vérifier que le point $H(1;4)$ est situé à l'extérieur du cercle (C).
1pts	b-Donner les équations des tangentes au cercle (C) et qui passe par le point H.

3) b)

$$\begin{cases} x+y+3=0 \\ x^2+y^2-2x+2y-7=0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x=-3-y \\ (+3+y)^2+y^2+2(+3+y)+2y-7=0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x=-3-y \\ 9+6y+y^2+y^2+6+2y+2y-7=0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x=-3-y \\ 2y^2+10y+8=0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x=-3-y \\ y^2+5y+4=0 \end{cases}$$

$\Delta=25-16=9$

$y_1=\dfrac{-5-3}{2}=-4$

$y_2=\dfrac{-5+3}{2}$
$=-1$

Si y = -1 $\Rightarrow x=-3+1$
$=-2$

$A(-2,-1)$

Si $y=-4$

Alors

$x=-3+4$
$=1$

$B(1,-4)$

4pts	**EXERCICE 02**

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ on considère les points : $A(2;0)$; $B(1;\sqrt{3})$

1.5pts 1)Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{AB}$ et les distances AO et AB.

1.5pts 2)Calculer $\cos\left(\overline{\overrightarrow{AO};\overrightarrow{AB}}\right)$ et $\sin\left(\overline{\overrightarrow{AO};\overrightarrow{AB}}\right)$.

0.5pts 3)a-Déterminer la mesure principale de l'angle $\left(\overline{\overrightarrow{AO};\overrightarrow{AB}}\right)$.

0.5pts b-En déduire la nature du triangle ABC.

9pts	**EXERCICE 03**

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ on considère les points : $A(-1;2)$; $B(3;-4)$

Soit (C) l'ensemble des points M du plan vérifient : $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=-4$.

1.25pts 1)a-Montrer que : $x^2+y^2-2x+2y-7=0$ est une équation cartésienne de l'ensemble (C).

1.25pts b-Montrer que (C) est un cercle de centre $\Omega(1,-1)$ et de rayon $R=3$.

0.5pts 2)a-Vérifier que $K(1;2)\in(C)$.

1pts b-Donner une équation cartésienne de la droite tangente (D) au cercle (C) au point K.

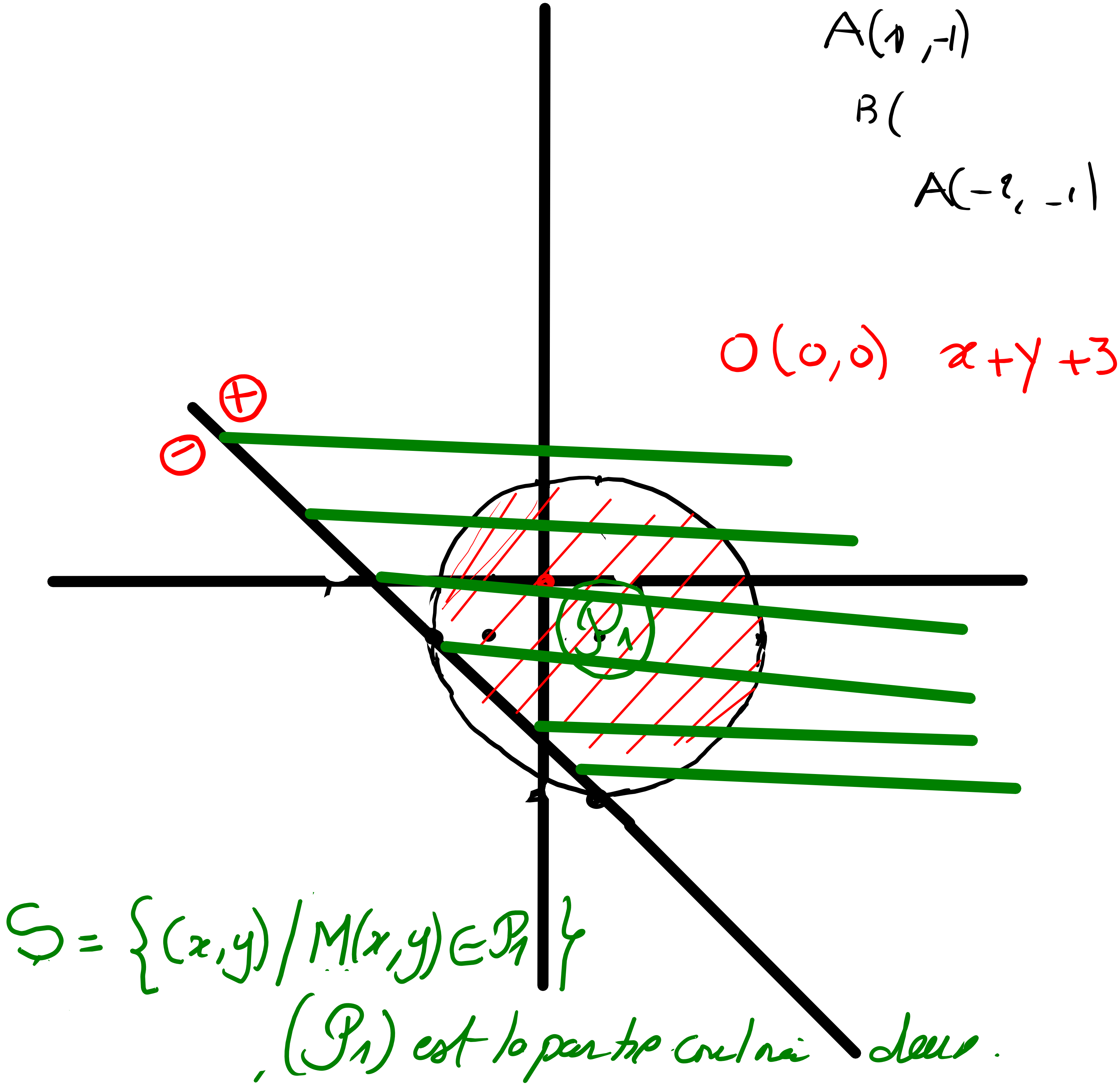
0.75pts 3)a-Montrer que la droite (Δ) d'équation $x+y+3=0$ coupe le cercle (C) en deux points.

1.25pts b-Déterminer les cordonnées des points d'intersection de la droite (Δ) et le cercle (C).

1.5pts 4)Résoudre graphiquement le système : $\begin{cases} x^2+y^2-2x+2y-7<0 \\ x+y+3>0 \end{cases}$.

0.5pts 5)a-Vérifier que le point $H(1;4)$ est situé à l'extérieur du cercle (C).

1pts b-Donner les équations des tangentes au cercle (C) et qui passe par le point H.



Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{5u_n - 1}{u_n + 3} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

et soit f la fonction numérique définie sur $I = [1;+\infty[$

par : $$f(x) = \frac{5x-1}{x+3}$$

1) Montrer que f est strictement croissante sur I

et en déduire que : $f([1;+\infty[) \subset [1;+\infty[$

2) Montrer que : $(\forall x \in I)\ f(x) - x = -\dfrac{(x-1)^2}{x+3}$

puis en déduire que : $(\forall x \in I)\ f(x) \leq x$

3) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n > 1$

4) Montrer que la suite (u_n) est décroissante puis en

6) Soit (v_n) la suite définie par : $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$.

a) Montrer que la suite (v_n) est arithmétique de raison $r = \dfrac{1}{4}$.

b) Exprimer v_n et u_n en fonction de n.

Exercice 11 : Soit l'ensemble :

$\left(C_m\right) = \{M\ (x,\ y) \in (\mathcal{P}) / x^2 + y^2 - 2mx + 4my + 4m^2 - 1 = 0\}$

où m est un réel.

1- Montrer que pour tout m dans $\mathbb{R}$, l'ensemble $\left(C_m\right)$ est un cercle et déterminer ses éléments.

2- Déterminer l'équation cartésienne du plus petit cercle $\left(C_m\right)$.

3- Déterminer l'ensemble dans lequel varient les centres Ω_m quand m décrit $\mathbb{R}$

4- a) Déterminer pour quelles valeurs de m le point $A(-1,2)$ appartient-il à $\left(C_m\right)$

b) Soit $M_0\left(x_0; y_0\right))$ un point donné dans le plan, existent-ils toujours des réels m
qui vérifient $M_0 \in \left(C_m\right)$

5- Déterminer s'il existe l'intersection de tous les cercles $\left(C_m\right)$

Exercice1 : dans Le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ Considérons les points

$A(1;-3)$ et $B(3;7)$ et $C(-3;1)$

1)Montrer que le triangle ABC est rectangle en C
2)Calculer la surface du triangle ABC

Exercice2: dans Le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O;\dot{i};\dot{j}\right)$ Considérons les points

$A(5;0)$ et $B(2;1)$ et $C(6;3)$

1) Calculer $\cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$ et $\sin\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$

2)en déduire une mesure de l'angle $\left(\overline{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)$

Exercice3 : déterminer une équation cartésienne de la droite (D) qui passe par $A(0;1)$ et qui admet $\vec{n}(2;1)$ comme vecteur normal

Exercice4 :donner un vecteur normal a la droite (D) dans les cas suivants : 1)$(D): x-2y+5=0$

2)$(D): 2y-3=0$ 3)$(D): x-1=0$

Exercice9: dans Le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère orthonormé et direct $\mathcal{R}(O;\vec{i};\vec{j})$ Considérons les points $A(1;-1)$ et $B(4;-1)$ et $C(-2;2)$

1) Calculer : $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}$ et $\det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$

2)en déduire une mesure de l'angle $(\dot{AB};\dot{AC})$

3)Calculer la surface du triangle ABC

4)déterminer une équation cartésienne de la hauteur du triangle ABC passant par A

5)déterminer une équation cartésienne de la bissectrice de l'angle $(\dot{AB};\dot{AC})$

Exercice10 : déterminer l'équation cartésienne du cercle de centre $\Omega(-1;2)$ et de rayon $r=3$

Exercice11 :Déterminer L'ensemble (E) dans les cas suivants :

1) (E): $x^2+y^2-x+3y-4=0$

2) (E): $x^2+y^2-6x+2y+10=0$

3) (E): $x^2+y^2-4x+5=0$

Exercice ① : (07,00 pts)

Soit (u_n) une suite définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 1}{u_n + 2}$ pour tout n dans IN	
1) Montrer par récurrence $u_n \geq 1$ pour tout n dans IN	1,00
2) Montrer que $u_{n+1} - u_n = \dfrac{-(u_n - 1)^2}{u_n + 2}$ pour tout n dans IN puis déduire que (u_n) est décroissante et convergente.	1,75
Soit (v_n) une suite définie par $v_n = \dfrac{3}{u_n - 1}$ pour tout n dans IN	
3) a) Montrer que (v_n) est une suite arithmétique déterminer sa raison et son premier terme.	1,25
b) Écrire v_n en fonction de n puis montrer que $u_n = \dfrac{n+6}{n+3}$ pour tout n dans IN.	1,50
c) Calculer la limite de la suite (u_n)	0,50
4) Calculer la limite de la suite (w_n) définie par $w_n = u_n\sqrt{3 + u_n}$ pour tout n dans IN	1,00

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par: $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{8(u_n - 1)}{u_n + 2} \end{cases}$; $(\forall n \in \mathbb{N})$

1. Montrer par récurrence que: $\forall n \in \mathbb{N}; 2 < u_n < 4$

2. a) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante ,puis en déduire que $\forall n \in \mathbb{N}; 3 < u_n < 4$

   b) En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente

3. a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}; 0 < 4 - u_{n+1} \leq \frac{4}{5}(4 - u_n)$

   b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}\ ; 0 < 4 - u_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$

   , puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

4. On pose $\forall n \in \mathbb{N}$; $v_n = \dfrac{u_n - 4}{u_n - 2}$

   a) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$

   b) En déduire que v_n , puis u_n en fonction de n.

   c) Retrouver alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

5. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}$; $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots\dots + v_n$,

   et $T_n = \dfrac{2}{u_0 - 2} + \dfrac{2}{u_1 - 2} + \dfrac{2}{u_2 - 2} + \dots\dots + \dfrac{2}{u_n - 2}$

   a) Calculer S_n et T_n en fonction de n .

   b) En déduire que : $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{T_n}{n}$