

EXERCICE 1 : (7.75 points)

Partie I

0.5 1- a) Montrer que : $\forall t \in [0, +\infty[; \frac{4}{(2+t)^2} \leq \frac{1}{1+t} \leq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{(1+t)^2} \right)$

0.5 b) En déduire que : $\forall x \in [0, +\infty[; \frac{2x}{2+x} \leq \ln(1+x) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{x^2+2x}{1+x} \right)$

2- Soit g la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$$

0.5 Montrer que : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{g(x)-1}{x} = \frac{-1}{2}$

1) a) Soit $t \geq 0$ on a $\frac{4}{(2+t)^2} - \frac{1}{1+t} = \frac{4(1+t) - (2+t)^2}{(2+t)^2(1+t)}$
 $= \frac{4+4t-4-4t-t^2}{(2+t)^2(1+t)} = \frac{-t^2}{(2+t)^2(1+t)} < 0$

d'après a) $\frac{1}{1+x} \geq \frac{4}{(2+x)^2}$

donc $g'(x) \geq 0$
 d'où g est croissante
 $\forall x \geq 0 \Rightarrow g(x) \geq g(0)$
 $\Rightarrow g(x) \geq 0$

donc : $\frac{4}{(2+t)^2} \leq \frac{1}{1+t}$

de la même façon on montre l'autre

d'où $(\forall t \geq 0) \frac{4}{(2+t)^2} \leq \frac{1}{1+t} \leq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{(1+t)^2} \right)$

b) on pose $g(x) = \ln(1+x) - \frac{2x}{2+x}$
 $g'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{4}{(2+x)^2}$

EXERCICE 1 : (7.75 points)

Partie I

0.5 1- a) Montrer que : $\forall t \in [0, +\infty[; \frac{4}{(2+t)^2} \leq \frac{1}{1+t} \leq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{(1+t)^2} \right)$

0.5 b) En déduire que : $\forall x \in [0, +\infty[; \frac{2x}{2+x} \leq \ln(1+x) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{x^2+2x}{1+x} \right)$

2- Soit g la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$$

0.5 Montrer que : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{g(x) - 1}{x} = \frac{-1}{2}$

de m on pose $h(x) = \ln(1+x) - \frac{1}{2} \left(\frac{x^2+2x}{1+x} \right)$
soit $x > 0$

$$h'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{(1+x)^2} \right)$$

d'après : 1) @ $\frac{1}{1+x} \leq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{(1+t)^2} \right)$

d'ou $h'(x) \leq 0$
d'ou h est str decroissant

d'ou $\forall x > 0$ on a $h(x) \leq h(0)$
 $h(x) \leq 0$

d'ou $\ln(1+x) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{x^2+2x}{1+x} \right)$

D'ou $\forall x > 0$ $\frac{2x}{2+x} \leq \ln(1+x) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{x^2+2x}{1+x} \right)$

e) $g(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$. $g(0) = 1$

$$\begin{aligned} \lim_{0^+} \frac{g(x) - 1}{x} &= \lim_{0^+} \frac{\frac{\ln(1+x)}{x} - 1}{x} \\ &= \lim_{0^+} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} \end{aligned}$$

EXERCICE1 : (7.75 points)

Partie I

0.5 1- a) Montrer que : $\forall t \in [0, +\infty[; \frac{4}{(2+t)^2} \leq \frac{1}{1+t} \leq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{(1+t)^2} \right)$

0.5 b) En déduire que : $\forall x \in [0, +\infty[; \frac{2x}{2+x} \leq \ln(1+x) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{x^2+2x}{1+x} \right)$

2- Soit g la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$$

0.5 Montrer que : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{g(x)-1}{x} = \frac{-1}{2}$

ona: d'après 1(b)

$$(\forall x > 0) \frac{\frac{2x}{2+x} - x}{x^2} \leq \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{x^2 + 2x}{1+x} - x \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x^2}{(2+x)x^2} \leq \frac{g(x)-1}{x} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{x^2 + 2x - 2x - 2x^2}{(1+x)x^2} \right)$$

$$\frac{-1/2}{-1/2} \leq \frac{g(x)-1}{x} \leq \frac{-1/2}{-1/2}$$

d'où $\lim_{0^+} \frac{g(x)-1}{x} = -1/2$

$x > 0$

Partie II

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f(0) = 1 \text{ et } \forall x \in]0, +\infty[; f(x) = g(x)e^{-x}$$

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})

1- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2- a) Montrer que f est continue à droite en 0

b) Vérifier que : $\forall x \in]0, +\infty[; \frac{f(x)-1}{x} = \left(\frac{e^{-x}-1}{x}\right)g(x) + \left(\frac{g(x)-1}{x}\right)$

c) En déduire que f est dérivable à droite en 0 et déterminer $f'_d(0)$

3- Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ puis que :

$$\forall x \in]0, +\infty[; f'(x) = \frac{x - (1+x)^2 \ln(1+x)}{x^2(1+x)} e^{-x}$$

4- a) Montrer que : $\forall x \in]0, +\infty[; -\frac{3}{2} < \frac{x - (1+x)^2 \ln(1+x)}{x^2(1+x)} < 0$

b) En déduire que : $\forall x \in]0, +\infty[; -\frac{3}{2} < f'(x) < 0$

5- a) Dresser le tableau de variations de f

b) Construire la courbe (C) en faisant apparaître la demi-tangente à droite au point d'abscisse 0. (On prendra $\|\vec{i}\| = 2\text{cm}$)

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \cdot e^{-x}$
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x)}{x} \cdot e^{-x} =$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x)}{1+x} \cdot \frac{1+x}{x} \cdot e^{-x} = 0$

car $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x)}{1+x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{x} = 1 \end{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$

(C_f) admet une asymptote horizontale au voisin de $+\infty$ d'équation $y = 0$ (l'axe Ox)

2) a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} \cdot e^{-x} = 1 = f(0)$

car \dots
donc f continue à droite de 0.

b) Soit $x > 0$
 $\frac{f(x)-1}{x} = \frac{g(x) \cdot e^{-x} - 1}{x}$
 $= \frac{g(x) \cdot e^{-x} - g(x) + g(x) - 1}{x}$
 $= g(x) \left(\frac{e^{-x}-1}{x}\right) + \left(\frac{g(x)-1}{x}\right)$

$$\textcircled{c} \lim_{0^+} \frac{f(x)-1}{x} = \lim_{0^+} \left(\frac{e^{-x}-1}{-x} \right) g(x) + \frac{g(x)-1}{x}$$

$$= -1 \cdot 1 - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2} \in \mathbb{R} \quad (\forall x > 0) \text{ on a:}$$

donc f est dérivable à droite de 0 $f'(x) = (g(x)e^{-x})'$

$$f'_d(0) = -\frac{3}{2}$$

$$3) f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x} \cdot e^{-x}$$

on a: La fonction $x \rightarrow 1+x$ dérivable et str positive sur $]0, +\infty[$

ALors: la fonction $x \rightarrow \ln(1+x)$ dérivable sur $]0, +\infty[$

et $x \rightarrow x$ dérivable et non nul sur

$$x \rightarrow e^{-x} \quad \text{,,} \quad \text{sur }]0, +\infty[$$

d'où f est dérivable sur $]0, +\infty[$

$$\lim_{-\infty} e^x = 0, \quad \lim_{+\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

$$\lim_{-\infty} x^n \cdot e^x = 0 \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

$$\lim_0 \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

x>0

Partie II

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f(0)=1 \text{ et } \forall x \in]0, +\infty[; f(x) = g(x)e^{-x}$$

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})

0.5 1- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

0.25 2- a) Montrer que f est continue à droite en 0

0.25 b) Vérifier que : $\forall x \in]0, +\infty[; \frac{f(x)-1}{x} = \left(\frac{e^{-x}-1}{x} \right) g(x) + \left(\frac{g(x)-1}{x} \right)$

0.5 c) En déduire que f est dérivable à droite en 0 et déterminer $f'_d(0)$

3- Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ puis que :

0.75
$$\forall x \in]0, +\infty[; f'(x) = \frac{x - (1+x)^2 \ln(1+x)}{x^2(1+x)} e^{-x}$$

0.5 4- a) Montrer que : $\forall x \in]0, +\infty[; -\frac{3}{2} < \frac{x - (1+x)^2 \ln(1+x)}{x^2(1+x)} < 0$

0.25 b) En déduire que : $\forall x \in]0, +\infty[; -\frac{3}{2} < f'(x) < 0$

0.25 5- a) Dresser le tableau de variations de f

0.75 b) Construire la courbe (C) en faisant apparaître la demi-tangente à droite au point d'abscisse 0. (On prendra $\| \vec{i} \| = 2\text{cm}$)

Partie II

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur]0, +∞[par :

f(0) = 1 et ∀x ∈]0, +∞[; f(x) = g(x)e^{-x}

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, i, j)

0.5 1- Calculer lim_{x → +∞} f(x) puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

0.25 2- a) Montrer que f est continue à droite en 0

0.25 b) Vérifier que : ∀x ∈]0, +∞[; f(x) - 1 = ((e^{-x} - 1)/x)g(x) + ((g(x) - 1)/x)

0.5 c) En déduire que f est dérivable à droite en 0 et déterminer f'_d(0)

3- Montrer que f est dérivable sur]0, +∞[puis que :

∀x ∈]0, +∞[; f'(x) = (x - (1+x)^2 ln(1+x) / x^2(1+x)) e^{-x}

0.5 4- a) Montrer que : ∀x ∈]0, +∞[; -3/2 < (x - (1+x)^2 ln(1+x) / x^2(1+x)) < 0

0.25 b) En déduire que : ∀x ∈]0, +∞[; -3/2 < f'(x) < 0

0.25 5- a) Dresser le tableau de variations de f

0.75 b) Construire la courbe (C) en faisant apparaître la demi-tangente à droite au point d'abscisse 0. (On prendra ||i|| = 2cm)

f'(x) = g'(x) · e^{-x} + (e^{-x})' · g(x)
= g'(x) e^{-x} - e^{-x} · g(x)

f'(x) = (g'(x) - g(x)) e^{-x}
= ((1/(x+1) · x - ln(1+x)) - ln(1+x)/x) e^{-x}
= (x - (x+1) ln(1+x) / ((x+1)x^2) - ln(1+x)/x) e^{-x}
= (x - (1+x)^2 ln(1+x) / x^2(1+x)) · e^{-x}

(e^{u(x)})' = u'(x) · e^{u(x)}

4) a) soit x ∈]0, +∞[
on a d'après Prop (I) (a) (b)

2x / - ≤ ln(1+x) ≤ 1/2 (x^2 + 2x) / -x

<

$$\Rightarrow \frac{2x(1+x)^2}{2+x} \leq (1+x)^2 \ln(1+x) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{x^2+2x}{1+x} \right) (1+x)^2$$

$$x - \frac{1}{2} \left(\frac{x^2+2x}{1+x} \right) (1+x) \leq x - (1+x)^2 \ln(1+x) \leq x - \frac{2x(1+x)^2}{2+x}$$

à continuer le calcul.

d'où :

$$\left(\frac{-3}{2} \right) \leq \frac{x - (1+x)^2 \ln(1+x)}{x^2(1+x)} \leq \left(\frac{3}{2} \right) < 0$$

b) on a soit $x > 0$

$$-\frac{3}{2} < \frac{x - (1+x)^2 \ln(1+x)}{x^2(1+x)} < 0$$

on a $x > 0 \Rightarrow -x < 0$
 $\Rightarrow 0 < e^{-x} < e^0$
 $\Rightarrow 0 < e^{-x} < 1$ (2)

$$0 < \frac{x - (1+x)^2 \ln(1+x)}{x^2(1+x)} < \frac{3}{2} \quad (1)$$

$$0 < -f'(x) < \frac{3}{2}$$

$$-\frac{3}{2} < f'(x) < 0$$

Partie II

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $[0, +\infty[$ par :
 $f(0) = 1$ et $\forall x \in]0, +\infty[; f(x) = g(x)e^{-x}$

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})

0.5 1- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

0.25 2- a) Montrer que f est continue à droite en 0

0.25 b) Vérifier que : $\forall x \in]0, +\infty[; \frac{f(x)-1}{x} = \left(\frac{e^{-x}-1}{x} \right) g(x) + \left(\frac{g(x)-1}{x} \right)$

0.5 c) En déduire que f est dérivable à droite en 0 et déterminer $f'_d(0)$

3- Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ puis que :

0.75 $\forall x \in]0, +\infty[; f'(x) = \frac{x - (1+x)^2 \ln(1+x)}{x^2(1+x)} e^{-x}$

0.5 4- a) Montrer que : $\forall x \in]0, +\infty[; -\frac{3}{2} < \frac{x - (1+x)^2 \ln(1+x)}{x^2(1+x)} < 0$

0.25 b) En déduire que : $\forall x \in]0, +\infty[; -\frac{3}{2} < f'(x) < 0$

0.25 5- a) Dresser le tableau de variations de f

0.75 b) Construire la courbe (C) en faisant apparaître la demi-tangente à droite au point d'abscisse 0. (On prendra $\|\vec{i}\| = 2\text{cm}$)

$x > 0$

Partie II

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f(0)=1 \text{ et } \forall x \in]0, +\infty[; f(x) = g(x)e^{-x}$$

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})

1- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2- a) Montrer que f est continue à droite en 0

b) Vérifier que : $\forall x \in]0, +\infty[; \frac{f(x)-1}{x} = \left(\frac{e^{-x}-1}{x}\right)g(x) + \left(\frac{g(x)-1}{x}\right)$

c) En déduire que f est dérivable à droite en 0 et déterminer $f'_d(0)$

3- Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ puis que :

$$\forall x \in]0, +\infty[; f'(x) = \frac{x - (1+x)^2 \ln(1+x)}{x^2(1+x)} e^{-x}$$

4- a) Montrer que : $\forall x \in]0, +\infty[; -\frac{3}{2} < \frac{x - (1+x)^2 \ln(1+x)}{x^2(1+x)} < 0$

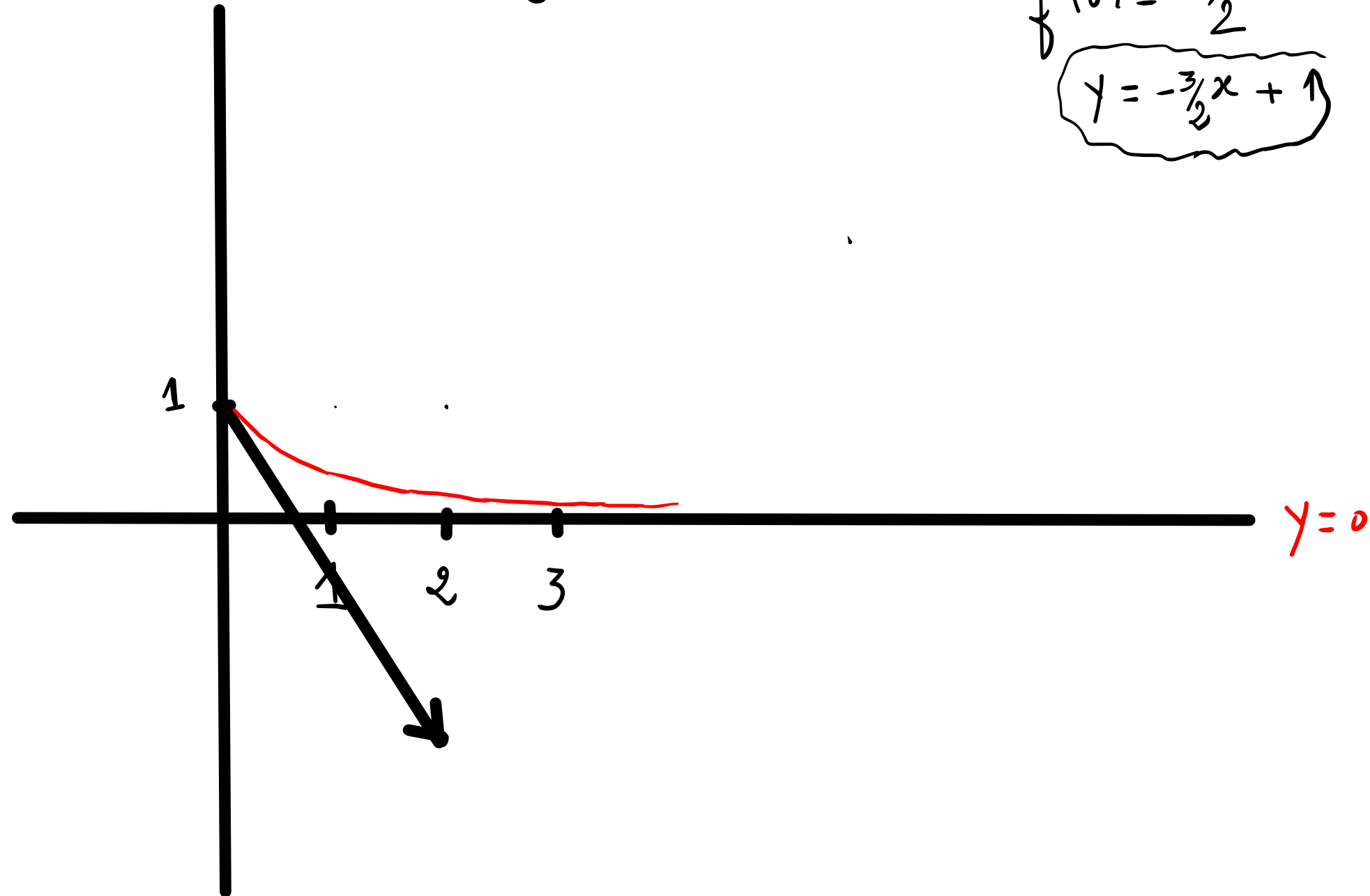
b) En déduire que : $\forall x \in]0, +\infty[; -\frac{3}{2} < f'(x) < 0$

5- a) Dresser le tableau de variations de f

b) Construire la courbe (C) en faisant apparaître la demi-tangente à droite au point d'abscisse 0. (On prendra $\|\vec{i}\| = 2\text{cm}$)

ona ($\forall x > 0$) $f''(x) < 0$
donc f est str concave

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		-	
$f(x)$	1		0



$$f'(0) = -\frac{3}{2}$$

$$y = -\frac{3}{2}x + 1$$

Partie III

- 0.5 1- Montrer que l'équation d'inconnue $x : f(x) = 3x$, admet une unique solution α dans $]0, +\infty[$
- 2- Soient $\beta \in \mathbb{R}^+$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite numérique définie par :

$$U_{n+1} = h(U_n)$$

$$h(x) = x \quad (\text{point fixe})$$

(U_n) suite explicite

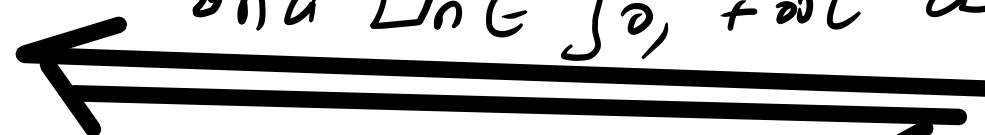
$$2) \text{ Soit } \beta \in \mathbb{R}^+ \quad \begin{cases} U_0 = \beta \\ U_{n+1} = \frac{1}{3} f(U_n) \end{cases}$$

a) $(\forall n \in \mathbb{N}), U_n > 0$
 pour $n=0$ on a $U_0 = \beta > 0$ (est vérifié par $n=0$)
 soit $n \in \mathbb{N}$ on suppose que $U_n > 0$ et Mg $U_{n+1} > 0$

$$\text{ona : } f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x} \cdot e^{-x} > 0 \quad (\forall x > 0)$$

d'un $f(x) > 0$

ona $U_n \in]0, +\infty[$ donc $f(U_n) > 0$
 $\frac{1}{3} f(U_n) > 0$



الصفحة	3	NS 24F	الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا - الدورة العادية 2023 - الموضوع
5			- مادة: الرياضيات - شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (خيار فرنسية)
			$u_0 = \beta$ et $\forall n \in \mathbb{N}; u_{n+1} = \frac{1}{3} f(u_n)$
0.5			a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}; u_n \geq 0$
0.5			b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}; u_{n+1} - \alpha , \frac{1}{2} u_n - \alpha $
0.5			c) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}; u_n - \alpha , \frac{1}{2^n} \beta - \alpha $
0.25			d) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers α

Partie : $g(x) = f(x) - 3x$ (la bijection)

d'après P.R $\forall n \in \mathbb{N}$ $U_n > 0$ $U_{n+1} > 0$

Partie III

- 0.5 1- Montrer que l'équation d'inconnue $x : f(x) = 3x$, admet une unique solution α dans $]0, +\infty[$
- 2- Soient $\beta \in \mathbb{R}^+$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite numérique définie par :

$$\left| \frac{h(u_n) - h(\alpha)}{u_n - \alpha} \right| \leq \frac{1}{2}$$

On pose : $h(x) = \frac{1}{3} f(x)$

On a : h est continue sur l'intervalle fermé d'extrémités α et u_n

h est dérivable sur l'intervalle ouvert d'extrémités α et u_n

et $h'(x) = \frac{1}{3} f'(x)$

et on a $-\frac{3}{2} < f'(x) < 0$

$\Rightarrow -\frac{1}{2} < \frac{1}{3} f'(x) < 0$

d'après I. A. F $\Rightarrow \left| \frac{h(u_n) - h(\alpha)}{u_n - \alpha} \right| < \frac{1}{2}$

الصفحة	3	NS 24F	الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا - الدورة العادية 2023 - الموضوع
5			- مادة: الرياضيات- شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (خيار فرنسية)

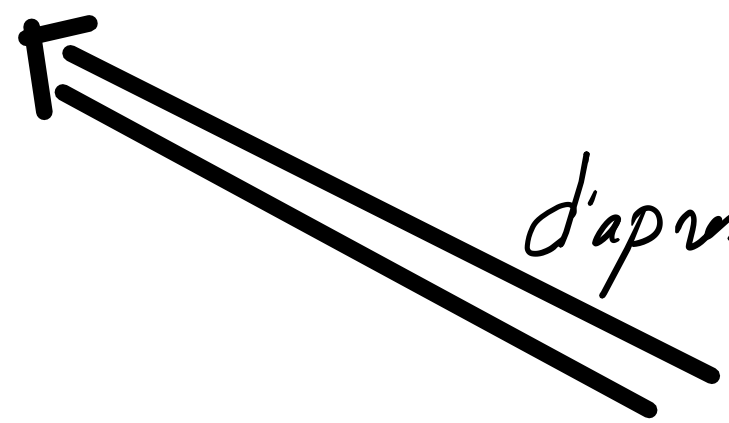
$u_0 = \beta$ et $\forall n \in \mathbb{N}; u_{n+1} = \frac{1}{3} f(u_n)$

- 0.5 a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}; u_n \geq 0$
- 0.5 b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}; |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$
- 0.5 c) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}; |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n} |\beta - \alpha|$
- 0.25 d) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers α

b) $(\forall n \in \mathbb{N}); |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$

$\Leftrightarrow \left| \frac{1}{3} f(u_n) - \frac{1}{3} f(\alpha) \right| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$

$\Leftrightarrow |h(u_n) - h(\alpha)| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$



Partie III
 0.5 1- Montrer que l'équation d'inconnue $x : f(x) = 3x$, admet une unique solution α dans $]0, +\infty[$
 2- Soient $\beta \in \mathbb{R}^+$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite numérique définie par :

الصفحة	3	NS 24F	الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا - الدورة العادية 2023 - الموضوع
5			- مادة: الرياضيات - شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (خيار فرنسية)

$u_0 = \beta$ et $\forall n \in \mathbb{N}; u_{n+1} = \frac{1}{3}f(u_n)$

0.5 a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}; u_n \geq 0$
 0.5 b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}; |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$
 0.5 c) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}; |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}|\beta - \alpha|$
 0.25 d) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers α

c) $(\forall n \in \mathbb{N}) |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n} |\beta - \alpha|$
 pour $n=0$ on a $|u_0 - \alpha| = |\beta - \alpha| \leq \frac{1}{2^0} |\beta - \alpha|$
 est vérifiée pour $n=0$
 soit $n \in \mathbb{N}$ on suppose
 $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n} |\beta - \alpha|$

et Mg : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n+1}} |\beta - \alpha|$

On a : $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n} |\beta - \alpha|$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n+1}} |\beta - \alpha|$ ①

et on a d'après ①

$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$ ②

de ① et ② par transitivité on a :

$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n+1}} |\beta - \alpha|$

d'où d'après I.R

$(\forall n \in \mathbb{N}) |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n} |\beta - \alpha|$

Transitivité
 si $a \leq b$
 et $b \leq c$
 Alors $a \leq c$

$-1 < \frac{1}{2} < 1$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$

d'où (u_n) est convergente et $\lim u_n = \alpha$

EXERCICE 2 : (2.25 points)

On considère la fonction numérique : $x \mapsto e^x$ et soit (Γ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \{0; 1; \dots; n\}$, on note M_k le point de la courbe (Γ) de coordonnées $\left(\frac{k}{n}; e^{\frac{k}{n}}\right)$

0.5 1-a) Montrer que : $\forall k \in \{0; 1; \dots; (n-1)\} \exists c_k \in \left] \frac{k}{n}; \frac{k+1}{n} \right[$ tel que : $e^{\frac{k+1}{n}} - e^{\frac{k}{n}} = \frac{1}{n} e^{c_k}$

0.25 b) Montrer que : $\forall k \in \{0; 1; \dots; (n-1)\}; M_k M_{k+1} = \frac{1}{n} \sqrt{1 + e^{2c_k}}$
 ($M_k M_{k+1}$ désigne la distance de M_k à M_{k+1})

0.5 c) En déduire que : $\forall k \in \{0; 1; \dots; (n-1)\}; \frac{1}{n} \sqrt{1 + e^{\frac{2k}{n}}} \leq M_k M_{k+1} \leq \frac{1}{n} \sqrt{1 + e^{\frac{2(k+1)}{n}}}$

2- Soit $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite numérique définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*; S_n = \sum_{k=0}^{n-1} M_k M_{k+1}$

0.5 a) Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*; \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1 + e^{\frac{2k}{n}}} \leq S_n \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + e^{\frac{2k}{n}}}$

$$d(M_k, M_{k+1}) = \sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(e^{\frac{k+1}{n}} - e^{\frac{k}{n}}\right)^2} = \frac{1}{n} \sqrt{1 + e^{2c_k}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n} \sqrt{1 + e^{\frac{2k}{n}}} \leq M_k M_{k+1} \leq \frac{1}{n} \sqrt{1 + e^{\frac{2(k+1)}{n}}}$$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} M_k M_{k+1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1 + e^{\frac{2k}{n}}} \leq \sum_{k=0}^{n-1} M_k M_{k+1} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1 + e^{\frac{2(k+1)}{n}}}$$

On pose $k' = k + 1$
 si $k = 0 \Rightarrow k' = 1$
 si $k = n-1 \Rightarrow k' = n$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k'=1}^n \sqrt{1 + e^{\frac{2k'}{n}}}$$

EXERCICE2 : (2.25 points)

On considère la fonction numérique : $x \mapsto e^x$ et soit (Γ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \{0; 1; \dots; n\}$, on note M_k le point de la courbe (Γ) de

coordonnées $\left(\frac{k}{n}; e^{\frac{k}{n}}\right)$

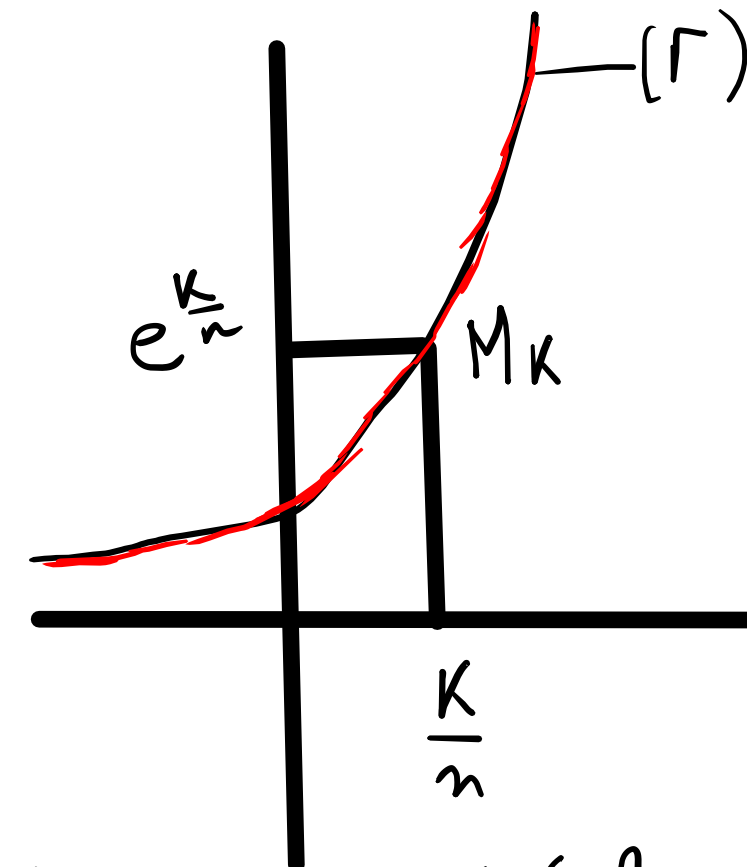
0.5 1- a) Montrer que : $\forall k \in \{0; 1; \dots; (n-1)\} \exists c_k \in \left[\frac{k}{n}; \frac{k+1}{n}\right]$ tel que : $e^{\frac{k+1}{n}} - e^{\frac{k}{n}} = \frac{1}{n} e^{c_k}$

0.25 b) Montrer que : $\forall k \in \{0; 1; \dots; (n-1)\} ; M_k M_{k+1} = \frac{1}{n} \sqrt{1 + e^{2c_k}}$
($M_k M_{k+1}$ désigne la distance de M_k à M_{k+1})

0.5 c) En déduire que : $\forall k \in \{0; 1; \dots; (n-1)\} ; \frac{1}{n} \sqrt{1 + e^{\frac{2k}{n}}}, M_k M_{k+1}, \frac{1}{n} \sqrt{1 + e^{\frac{2(k+1)}{n}}}$

2- Soit $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, la suite numérique définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^* ; S_n = \sum_{k=0}^{n-1} M_k M_{k+1}$

0.5 a) Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^* ; \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1 + e^{\frac{2k}{n}}}, S_n, \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + e^{\frac{2k}{n}}}$



$$\exists c \in]a, b[\\ \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

1) a) T.A.F. $(f(x) = e^x, \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right])$

b) $M_k M_{k+1} = \|\overrightarrow{M_k M_{k+1}}\|$

$$= \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + (y_{k+1} - y_k)^2} \\ = \sqrt{\left(\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n}\right)^2 + \left(e^{\frac{k+1}{n}} - e^{\frac{k}{n}}\right)^2}$$

$$M_k M_{k+1} = \sqrt{\left(\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n}\right)^2 + \left(e^{\frac{k+1}{n}} - e^{\frac{k}{n}}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{n^2} + \left(\frac{1}{n} e^{c_k}\right)^2} \quad (\text{d'après 1a})$$

$$M_k M_{k+1} = \frac{1}{n} \sqrt{1 + e^{2c_k}}$$

$$c) \quad \frac{1}{n} \sqrt{1 + e^{\frac{2k}{n}}} \leq M_k M_{k+1} \leq \frac{1}{n} \sqrt{1 + e^{\frac{2(k+1)}{n}}}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \{0, 1, \dots, (n-1)\}$

on a

$$\frac{k}{n} < c_k < \frac{k+1}{n}$$

$$\frac{2k}{n} < 2c_k < \frac{2(k+1)}{n}$$

$$e^{\frac{2k}{n}} < e^{2c_k} < e^{\frac{2(k+1)}{n}}$$

EXERCICE 2 : (2.25 points)

On considère la fonction numérique : $x \mapsto e^x$ et soit (Γ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \{0; 1; \dots; n\}$, on note M_k le point de la courbe (Γ) de coordonnées $\left(\frac{k}{n}; e^{\frac{k}{n}}\right)$

0.5 1-a) Montrer que : $\forall k \in \{0; 1; \dots; (n-1)\} \exists c_k \in \left[\frac{k}{n}; \frac{k+1}{n}\right]$ tel que : $e^{\frac{k+1}{n}} - e^{\frac{k}{n}} = \frac{1}{n} e^{c_k}$

0.25 b) Montrer que : $\forall k \in \{0; 1; \dots; (n-1)\}; M_k M_{k+1} = \frac{1}{n} \sqrt{1 + e^{2c_k}}$
 ($M_k M_{k+1}$ désigne la distance de M_k à M_{k+1})

0.5 c) En déduire que : $\forall k \in \{0; 1; \dots; (n-1)\}; \frac{1}{n} \sqrt{1 + e^{\frac{2k}{n}}} \leq M_k M_{k+1} \leq \frac{1}{n} \sqrt{1 + e^{\frac{2(k+1)}{n}}}$

2- Soit $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite numérique définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*; S_n = \sum_{k=0}^{n-1} M_k M_{k+1}$

0.5 a) Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*; \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1 + e^{\frac{2k}{n}}} \leq S_n \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + e^{\frac{2k}{n}}}$



⇒ Soit $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, On pose : $a_n = S_{2n}$ et $b_n = S_{2n+1}$.

1) a) Montrer que les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.

b) Quelle conclusion peut-on déduire ?

2) a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+) ; \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k-1} x^{k-1} \leq \frac{1}{1+x} \leq \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^{k-1} x^{k-1}$.

b) En déduire que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+) ; \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \leq \ln(1+x) \leq \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$.

3) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; a_n \leq \ln(2) \leq b_n$. Puis en déduire la valeur de la limite commune de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

b) Montre que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; |S_n - \ln(2)| \leq \frac{1}{n}$. Puis en déduire que la suite

$(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente en précisant sa limite.



⇒ Soit $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, On pose : $a_n = S_{2n}$ et $b_n = S_{2n+1}$.

1) a) Montrer que les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.

b) Quelle conclusion peut-on déduire ?

2) a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+) ; \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k-1} x^{k-1} \leq \frac{1}{1+x} \leq \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^{k-1} x^{k-1}$.

b) En déduire que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+) ; \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \leq \ln(1+x) \leq \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$.

3) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; a_n \leq \ln(2) \leq b_n$. Puis en déduire la valeur de la limite commune de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

b) Montre que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; |S_n - \ln(2)| \leq \frac{1}{n}$. Puis en déduire que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente en précisant sa limite.