Exercice n°3:

I) Soit f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} x + (1-x)\ln(1-x) & si \ x \neq 1 \\ 1 & si \ x = 1 \end{cases}$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Déterminer le domaine D de f.

2) a) Etudier la continuité de f sur D.

b) Etudier la dérivabilité de f à gauche en 1.Interpréter graphiquement ce résultat.

3) Etudier les variations de f.

4) Tracer la courbe représentative (C) de f dans un repère orthonormé.

II) On pose, pour tout $x \in [0,1[$, $g(x)=f'(x)$.

1) Etudier les variations de g.

2) Soit $n \in IN^*$, et k un entier tel que $0 \leq k \leq n-2$.

a) Montrer que pour tout $x \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$ on a : $g\left(\frac{k}{n}\right) \leq g(x) \leq g\left(\frac{k+1}{n}\right)$.

b) En déduire que : $\frac{1}{n} g\left(\frac{k}{n}\right) \leq f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \frac{1}{n} g\left(\frac{k+1}{n}\right)$.

3) On pose: $U_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right)$.

a) Montrer que $\frac{1}{n} \ln\left(\frac{1}{n}\right) + 1 - \frac{1}{n} \leq U_n \leq 1 - \frac{1}{n}$.

b) En déduire que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite .

4) Montrer que $U_n = \ln\left(\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}\right)$. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$.

Exercice 6

1) montrer que $\left(\forall x \in \mathbb{R}^{+*}\right) \quad \ln x \leq x-1$

2) soit n de $\mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. $x_1 ; x_2 ; \ldots\ldots ; x_n$, $\alpha_1 ; \alpha_2 ; \ldots\ldots ; \alpha_n$ des réels de $\mathbb{R}^{*+}$

Tels que $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1$ on pose $y = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$

a) Montrer que pour tout k de $\{1;2;\ldots\ldots;n\}$ on a : $\alpha_k \ln\left(\frac{x_k}{y}\right) \leq \frac{\alpha_k x_k}{y} - \alpha_k$

b) En déduire que : $\sum_{k=1}^{k=n} \alpha_k \ln(x_k) \leq \ln\left(\sum_{k=1}^{k=n} \alpha_k x_k\right)$

c) Montrer que : $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} \ln(x_k) \leq \ln\left(\frac{\sum_{k=1}^{k=n} x_k}{n}\right)$

d) Prouver que $\sqrt[x]{x_1 x_2 \ldots\ldots x_n} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} x_k$

e) Montrer que $n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$

En déduire que $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \ldots\ldots + \frac{x_n}{x_1} \geq n$ pour tous $x_1 ; x_2 ; \ldots\ldots ; x_n$ de $\mathbb{R}^{*+}$

EXERCICE1 : (10 points)

Partie I

Pour tout entier naturel **non nul** n , on considère la fonction f_n définie sur $I=[0,+\infty[$

par : $f_n(0)=0$ et $(\forall x\in]0,+\infty[)$; $f_n(x)=\sqrt{x}(\ln x)^n$

et soit (C_n) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$

0.5 1-a) Vérifier que : $(\forall x\in]0,+\infty[)$; $\sqrt{x}(\ln x)^n=(2n)^n\left(x^{\frac{1}{2n}}\ln\left(x^{\frac{1}{2n}}\right)\right)^n$, en déduire que f_n est continue à droite en 0

0.25 b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$

0.75 c) Vérifier que : $(\forall x\in]0,+\infty[)$; $\dfrac{f_n(x)}{x}=(2n)^n\left(\dfrac{\ln\left(x^{\frac{1}{2n}}\right)}{x^{\frac{1}{2n}}}\right)^n$, en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f_n(x)}{x}$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

0.5 d) Calculer, suivant la parité de n, $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f_n(x)}{x}$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

0.75 2-a) Montrer que f_n est dérivable sur $]0;+\infty[$ et que :

$$(\forall x\in]0,+\infty[)\ ;\ f_n'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}(\ln x)^{n-1}(2n+\ln x)$$

0.25 b) Vérifier que : $\forall n\geq 2$, $f_n'(x)=0$ si et seulement si $(x=1$ ou $x=e^{-2n})$

1 c) Étudier, suivant la parité de n, le sens de variation de f_n et donner son tableau de variations.

0.25 d) Montrer que si n est impair et $n \geq 3$ alors le point d'abscisse 1 est un point d'inflexion de (C_n)

Partie II :

1- Soit $\beta \in]1, e[$ un réel fixé. On considère la suite numérique $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad ; \quad u_n = f_n(\beta)$$

0.25 a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad ; \quad 0 < u_n < \sqrt{e}$

0.25 b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.

0.25 c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

0.5 2-a) Montrer que pour tout entier n non nul, il existe un unique réel $x_n \in]1; e[$ tel que : $f_n(x_n) = 1$

0.75 b) Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ainsi définie est croissante, en déduire qu'elle est convergente.

3- On pose : $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$

0.5 a) Montrer que : $1 < \ell \leq e$

0.25 b) Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} (\ln x_n)^n = \dfrac{1}{\sqrt{\ell}}$

0.25 c) Montrer que si $\ell < e$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln(\ln x_n) = -\infty$

0.25 d) En déduire la valeur de ℓ

Partie III :

التمرين السابع

Soit n un entier non nul . on considère la fonction f_n définie par : $f_n(x) = e^x + \frac{x}{n}$

1) a) calculer les limites de f_n

b) étudier les variations de f_n et dresser le tableau de variation

2) montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une seule solution a_n et que $a_n \in \left]-\infty, 0\right[$

3) a) montrer que la suite $(a_n)_{n\geq 3}$ est décroissante

b) montrer que $f_n\left(-\ln\sqrt{n}\right) > 0$ et déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = -\infty$

c) déterminer le signe de $f_n\left(-\ln(n)\right)$. déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n}$

d) vérifier que $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right)$ $\frac{a_n}{\ln n} = -1 + \frac{\ln\left(-a_n\right)}{\ln n}$ puis déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{\ln n} = -1$

JUIN 2004

(I) soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \frac{e^{-x}}{x}$

1) calculer les limites de f aux bornes de $\mathbb{R}^*$

2) étudier le sens de variation de f

3) a) étudier les branches infinies de la courbe (C_f)

b) tracer la courbe (C_f)

(II) soit $(U_n)_n$ la suite définie par : $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = U_n^2 f(U_n) = U_n e^{-U_n}$

1) prouver que $(\forall x > 0)$: $e^x \geq x + 1$

2) en déduire que $(\forall x > 0)$ $x^2 f(x) \leq \frac{x}{x+1}$

3) a) montrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N})$ $0 < U_n < \frac{1}{n+1}$

b) montrer que $(U_n)_n$ est convergente et déterminer sa limite

4) on pose $V_n = \sum_{k=0}^{k=n-1} U_k$ pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$.

a) prouver que $V_n = \ln\left(\frac{1}{U_n}\right)$

b) déterminer la limite de la suite $(V_n)_n$

JUIN 2010

(I) on considère la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par : $f(x)=4xe^{-x^2}$

1) calculer la limite $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2) étudier le sens de variation de f puis dresser le tableau des variations

3) déterminer l'équation du demi-tangente à la courbe (C_f) en 0 et tracer (C_f)

(II) soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2

On considère la fonction f_n définie sur $[0,+\infty[$ par : $f(x)=4\,x^n\,e^{-x^2}$

1) a) montrer que $(\forall x>1)\ \ e^{-x^2}<e^{-x}$

b) en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$

2) étudier le sens de variation de f_n puis dresser le tableau des variations

3) montrer que : $(\exists!\, u_n \in\,]0,1[)\ \ f_n(u_n)=1$

4) a) vérifier que $(\forall n\geq 2)\ \ f_{n+1}(u_n)=u_n$

b) montrer que $(u_n)_n$ est croissante et convergente

5) on pose $l=\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

a) montrer que $0\leq l\leq 1$

b) montrer que $(\forall n\geq 2)\ \ -\dfrac{\ln 4}{n}<u_n<\dfrac{1-\ln 4}{n}$ en déduire la valeur de l