

D FAISCEAU DE CERCLES

Le plan \mathcal{P} est rapporté un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Pour m un paramètre réel, on considère \mathcal{C}_m l'ensemble des points $M(x, y)$ du plan vérifiant :

$$x^2 + y^2 - 2mx - 2(m+1)y + 2m - 1 = 0$$

- 1) Montrer que pour toute valeur réelle prise par le paramètre m , \mathcal{C}_m est un cercle en précisant son centre Ω_m et son rayon R_m .
- 2) Déterminer l'ensemble (D) des centres Ω_m quand m varie dans \mathbb{R} .
- 3) Montrer que tous les cercles \mathcal{C}_m passent par deux points fixes A et B .
- 4) Montrer que $(D) \perp (AB)$.
- 5) Soit $M_0(x_0, y_0)$ un point du plan.
— Déterminer la position du point M_0 pour laquelle il appartient à au moins un cercle \mathcal{C}_m .
- 6) Déterminer les cercles \mathcal{C}_m tangentes à la droite (Δ) d'équation $x + 2y = 0$.

E LIGNES DE NIVEAUX

Les parties A, B, C et D sont indépendantes.

Soit A et B deux points du plan tels que $AB = 4 \text{ cm}$ et I le milieu du segment $[AB]$.

On note G et H les barycentres respectifs des systèmes $\{(A, 1), (B, 3)\}$ et $\{(A, 1), (B, -3)\}$.

Partie A: On considère l'ensemble $\mathcal{C}_1 = \left\{ M \in \mathcal{P} / \frac{MA}{MB} = 3 \right\}$.

1) Etablir l'équivalence : $M \in \mathcal{C}_1 \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}) = 0$.

2) Prouver que : $M \in \mathcal{C}_1 \Leftrightarrow \overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{MH} = 0$.

3) En déduire la nature de l'ensemble \mathcal{C}_1 .

Partie B: On considère l'ensemble $\mathcal{C}_2 = \{ M \in \mathcal{P} / \overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB} = 4 \}$.

1) Justifier que $G \in \mathcal{C}_2$.

2) Etablir l'équivalence : $M \in \mathcal{C}_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{GM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

3) En déduire la nature de l'ensemble \mathcal{C}_2 .

Partie C: On considère l'ensemble $\mathcal{C}_3 = \{ M \in \mathcal{P} / MA^2 - MB^2 = 8 \}$.

1) Montrer que pour tout point M du plan : $MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB}$

2) En déduire que $\mathcal{C}_3 = \mathcal{C}_2$.

Partie D: On considère l'ensemble $\mathcal{C}_4 = \{ M \in \mathcal{P} / MA^2 + MB^2 = 10 \}$.

1) Montrer que pour tout point M du plan : $M \in \mathcal{C}_4 \Leftrightarrow MI = 1$

2) En déduire la nature de l'ensemble \mathcal{C}_4 .

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{5u_n - 1}{u_n + 3} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

et soit f la fonction numérique définie sur $I = [1; +\infty[$

par :
$$f(x) = \frac{5x - 1}{x + 3}$$

1) Montrer que f est strictement croissante sur I

et en déduire que : $f([1; +\infty[) \subset [1; +\infty[$

2) Montrer que : $(\forall x \in I) \quad f(x) - x = -\frac{(x-1)^2}{x+3}$

puis en déduire que : $(\forall x \in I) \quad f(x) \leq x$

3) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n > 1$

4) Montrer que la suite (u_n) est décroissante puis en

6) Soit (v_n) la suite définie par : $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$.

a) Montrer que la suite (v_n) est arithmétique de

$$\text{raison } r = \frac{1}{4}.$$

b) Exprimer v_n et u_n en fonction de n .

7pts

EXERCICE 03

On considère le cercle (C) d'équation : $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 3 = 0$

1.25pts

1) Montrer que (C) est un cercle de centre $\Omega(1;2)$ et de rayon $R = 2\sqrt{2}$.

0.5pts

2)a- Vérifier que $A(-1;0) \in (C)$.

1pts

b- Donner une équation cartésienne de la droite tangente (D) au cercle (C) au point A .

0.75pts

3)a- Montrer que la droite (Δ) d'équation $x + y - 3 = 0$ coupe le cercle (C) en deux points E et F .

1pts

b- Déterminer les coordonnées des points E et F .

1.25pts

c- Donner les équations des droites tangentes au cercle (C) en E et F .

0.5pts

4)a- Vérifier que le point $B(1;-2)$ est à l'extérieur du cercle (C) .

0.75pts

b- Déterminer les équations des tangentes au cercle (C) qui passe au point B .

Exercice10 : déterminer l'équation cartésienne du cercle de centre $\Omega(-1;2)$ et de rayon $r=3$

Exercice11 : Déterminer L'ensemble (E) dans les cas suivants :

1) $(E): x^2 + y^2 - x + 3y - 4 = 0$

2) $(E): x^2 + y^2 - 6x + 2y + 10 = 0$

3) $(E): x^2 + y^2 - 4x + 5 = 0$

Exercice9: dans Le plan (\mathcal{P}) est rapporté à un repère orthonormé et direct $\mathcal{R}(O; \vec{i}; \vec{j})$ Considérons les points

$A(1; -1)$ et $B(4; -1)$ et $C(-2; 2)$

1) Calculer : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ et $\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$

2) en déduire une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$

3) Calculer la surface du triangle ABC

4) déterminer une équation cartésienne de la hauteur du triangle ABC passant par A

5) déterminer une équation cartésienne de la bissectrice de l'angle $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$

Exercice1 : dans Le plan (\mathcal{P}) est rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}(O; \vec{i}; \vec{j})$ Considérons les points

$A(1; -3)$ et $B(3; 7)$ et $C(-3; 1)$

- 1) Montrer que le triangle ABC est rectangle en C
- 2) Calculer la surface du triangle ABC

Exercice2: dans Le plan (\mathcal{P}) est rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}(O; \vec{i}; \vec{j})$ Considérons les points

$A(5; 0)$ et $B(2; 1)$ et $C(6; 3)$

- 1) Calculer $\cos(\overline{AB}; \overline{AC})$ et $\sin(\overline{AB}; \overline{AC})$
- 2) en déduire une mesure de l'angle $(\overline{AB}; \overline{AC})$

Exercice4 :Considérons deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} non nuls et le trinôme $f(x) = (x\vec{u} + \vec{v})^2$

- 1- Développer $f(x)$.
- 2- Déterminer le signe de $f(x)$.
- 3- Déterminer le discriminant de $f(x)$.
- 4- en déduire que pour tout vecteurs \vec{u} et \vec{v} on a :
 $\vec{u} \cdot \vec{v} \leq |\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$
- 5- Quand est ce qu'on a l'égalité ?

Exercice5 :On sait que pour trois points donnés dans le plan on a : $MA + MB \geq AB$ le but de cette activité c'est de démontrer ce résultat.

Considérons deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} non nuls.

- 1- Développer $(\vec{u} + \vec{v})^2$
- 2- En utilisant l'inégalité précédente montrer que
 $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$.
- 3- Quand est ce qu'on a l'égalité ?

Exercice9: Soient le cercle

$$(C): (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 4 \text{ et } A(5,6)$$

1- Vérifier que le point A est à l'extérieur de (C)

2- a) Déterminer l'équation de la droite (δ) passant par A et parallèle à l'axe des ordonnées.

b) Vérifier que (δ) n'est pas tangente à (C) .

3- Soit (Δ) une droite qui passe par A et qui n'est pas parallèle à l'axe (Oy) et dont l'équation réduite est :

$(\Delta) y = mx + p$ a) Déterminer l'équation de (Δ) en fonction de m uniquement.

b) Déterminer m pour que (Δ) soit tangente au Cercle (C) .

4- Soit $B(4,5)$

a) Montrer que la droite passant par B et parallèle à l'axe des ordonnées est tangente au cercle (C) .

b) Soit (Δ') une droite qui passe par A et qui n'est pas parallèle à l'axe (Oy) et dont l'équation réduite est :

$(\Delta') y = mx + p$; Déterminer m pour que (Δ) soit tangente au cercle (C) .

Exercice 1 (R 2004) :

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{u_n^3}{3u_n^2 + 1} \quad \text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}.$$

- 1
 - a Montrer que : $u_n > 0$, pour tout n de \mathbb{N} .
 - b Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
 - c En déduire que la suite (u_n) est convergente.

- 2
 - a Montrer que : $u_{n+1} \leq \frac{1}{3}u_n$, pour tout n de \mathbb{N} .
 - b En déduire que : $u_n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$, pour tout n de \mathbb{N} puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

stapha

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par:
$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{8(u_n - 1)}{u_n + 2} \end{cases} ; (\forall n \in \mathbb{N})$$

① Montrer par récurrence que: $\forall n \in \mathbb{N}; 2 < u_n < 4$

② (a) Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante, puis en déduire que $\forall n \in \mathbb{N}; 3 < u_n < 4$

(b) En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente

③ (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}; 0 < 4 - u_{n+1} \leq \frac{4}{5}(4 - u_n)$

(b) En déduire que: $\forall n \in \mathbb{N}; 0 < 4 - u_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$
 , puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

④ On pose $\forall n \in \mathbb{N}; v_n = \frac{u_n - 4}{u_n - 2}$

(a) Montrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$

(b) En déduire que v_n , puis u_n en fonction de n .

(c) Retrouver alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

⑤ On pose: $\forall n \in \mathbb{N}; S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$,
et $T_n = \frac{2}{u_0 - 2} + \frac{2}{u_1 - 2} + \frac{2}{u_2 - 2} + \dots + \frac{2}{u_n - 2}$

(a) Calculer S_n et T_n en fonction de n .

(b) En déduire que: $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{T_n}{n}$