Exercice 1 (R 2004) :
On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{u_n^3}{3u_n^2+1} \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}.$$

1. a. Montrer que : $u_n > 0$, pour tout n de $\mathbb{N}$.
   b. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
   c. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
2. a. Montrer que : $u_{n+1} \leq \frac{1}{3}u_n$, pour tout n de $\mathbb{N}$.
   b. En déduire que : $u_n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$, pour tout n de $\mathbb{N}$ puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 24 (R 2021) :

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = \frac{1}{3}$ et $u_{n+1} = \frac{1+u_n}{3-u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

1. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $0 < u_n < 1$

2. a. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$ $u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n - 1)^2}{3 - u_n}$

   b. Montrer que la suite (u_n) est convergente.

3. On pose $v_n = \frac{1}{1-u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

   a. Montrer que (v_n) est une suite arithmétique et déterminer sa raison et son premier terme.

   b. Déterminer v_n en fonction de n et en déduire que $u_n = \frac{n+1}{n+3}$, pour tout n de $\mathbb{N}$

   c. Calculer la limite de la suite (u_n)

4. A partir de quelle valeur de n, a-t-on $u_n \geq \frac{1011}{1012}$?

Exercice 23 (N 2021) :

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{3-2u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

1. Calculer u_1
2. Montrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$, $0 < u_n \leq \dfrac{1}{2}$
3. a. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{1}{2}$

   b. En déduire la monotonie de la suite (u_n)
4. a. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $0 < u_n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$; puis calculer la limite de la suite (u_n)

   b. On pose $v_n = \ln(3-2u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$, calculer $\lim v_n$
5. a. Vérifier que pour tout n de $\mathbb{N}$, $\dfrac{1}{u_{n+1}} - 1 = 3\left(\dfrac{1}{u_n} - 1\right)$

   b. En déduire u_n en fonction de n pour tout n de $\mathbb{N}$

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par: $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{8(u_n - 1)}{u_n + 2} \end{cases}$; $(\forall n \in \mathbb{N})$

1. Montrer par récurrence que: $\forall n \in \mathbb{N}; 2 < u_n < 4$

2. (a) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante ,puis en déduire que $\forall n \in \mathbb{N}; 3 < u_n < 4$

   (b) En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente

3. (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}; 0 < 4 - u_{n+1} \leq \frac{4}{5}(4 - u_n)$

   (b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$;$0 < 4 - u_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$
   , puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

4. On pose $\forall n \in \mathbb{N}$; $v_n = \dfrac{u_n - 4}{u_n - 2}$

   (a) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$

   (b) En déduire que v_n , puis u_n en fonction de n.

   (c) Retrouver alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

5. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}$; $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots\dots + v_n$,
   et $T_n = \dfrac{2}{u_0 - 2} + \dfrac{2}{u_1 - 2} + \dfrac{2}{u_2 - 2} + \dots\dots + \dfrac{2}{u_n - 2}$

   (a) Calculer S_n et T_n en fonction de n .

   (b) En déduire que : $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{T_n}{n}$

Etude de fonction

Partie I : Soit g la fonction numérique défini sur $\mathbb{R}^+$ par : $g(x) = 6x - 8x\sqrt{x} - \frac{1}{2}$

1) Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation.
2) En déduire que, $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$ $g(x) \leq 0$

Partie II : Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f(x) = (4x-1)\sqrt{x} - 4x^2 + 1.$$

1) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. @Gamma Formation
2) Etudier la nature de la Branche infinie de (C_f)
3) Etudier la dérivabilité de f à droite de $x = 0$ puis Interpreter le resultat.
4) a) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)$ $f'(x) = \dfrac{g(x)}{\sqrt{x}}$
   b) Dresser le tableau de variations de f
5) Donner l'équation de la tangente (T) au point d'absciss $x = \frac{1}{4}$
6) a) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)$: $f''(x) = \dfrac{(1-2\sqrt{x})(16x+2\sqrt{x}+1)}{4x\sqrt{x}}$
   b) Etudier la concavité de (C_f)

Partie III : Soit h la restrication de f sur $I = [1, +\infty[$

1) Montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.
2) Tracer (C_f) et (C_h) et $(C_{h^{-1}})$ dans le même repère.
3) Déterminer : $\lim\limits_{x \to +\infty} h^{-1}(x)$ $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{h^{-1}(x)}{x}$