3) Déterminer la bijection réciproque g^{-1}

Exercice 3 (2,5)

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\sqrt{x-E(x)}$

1) Déterminer le domaine de définition de f
2) Montrer que f est périodique de période 1
3) Ecrire l'expression de f sur $[0;1[$ puis construire la courbe de f sur $[-2;3[$

Exercice 4 (2,5)

1) Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}:\ E(2x)=E(x)+E\left(x+\frac{1}{2}\right)$
2) En déduire que $\forall n\in\mathbb{N}:\ \sum_{k=0}^{n}E\left(\frac{x+2^k}{2^{k+1}}\right)=E(x)-E\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)$

Exercice (1)

On considère les deux fonctions $f \ et \ g$ définies par :

$$f(x) = \frac{x+2}{x-1} \quad \text{et} \quad g(x) = x^2$$

1) dresser le tableau de variation de $f \ et \ g$

2) tracer les courbes (C_f) et (C_g)

3) résoudre graphiquement l'inéquation $\frac{x+2}{x-1} \geq x^2$

Exercice (5)

Soit f la fonction définie par $f\left(x\right)=\dfrac{-2x}{x+1}$

1) donner le tableau de variation de f et tracer $\left(C_f\right)$

2) on considère la fonction $g\left(x\right)=\left(f\circ f\right)\left(x\right)$

a) détermine D_g et exprimer $g\left(x\right)$ en fonction de x

c) étudier le sens de variation de g sur $\left]-\infty,-1\right[$

Exercice (6)

On considère les deux fonctions f et g définies par :

$$f\left(x\right)=\frac{2\left(x^2+1\right)}{\left(x+1\right)^2} \quad et \quad g\left(x\right)=\frac{x-1}{x+1}$$

1) montrer que f admet un minimum en $a=1$

2) a) vérifier que $f(x)=1+(g(x))^2$

b) étudier les variations de f sur $\left]-1,1\right]$; $\left[1,\infty\right[$

2018-2019	Contrôle $N°1$	Groupe scolaire GAUSS

Exercice 1

On considère les fonctions f et g définies par : $f(x)=\dfrac{x+2}{x}$ et $g(x)=x^2+2x$

Partie (1)

1) a) dresser le tableau de variation de chacune des fonctions f et g (1.5 pt)

b) quelle est la nature des courbes (C_f) ; (C_g) et leurs éléments caractéristiques (1.5 pt)

2) a) résoudre l'équation $f(x)=g(x)$ (1 pt)

b) en déduire que (C_f) et (C_g) se coupent en trois points à déterminer (1 pt)

3) a) tracer dans un même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ les deux courbes (C_f) et (C_g) (2 pts)

b) résoudre graphiquement l'inéquation $\dfrac{2}{x}\geq(x+1)^2-2$ (1.5 pt)

Partie (2)

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} F(x)=f(x) & si\ x\notin[-2,1] \\ F(x)=g(x) & si\ x\in[-2,1] \end{cases}$

1) a) dresser le tableau de variation de F (1 pt)

b) tracer dans un repère $(O',\vec{i},\vec{j})$ la courbe représentative de la fonction F (1.5 pt)

2) discuter suivant m le nombre de solutions de l'équation $F(x)=m$ (1.5 pt)

3) on pose $h(x)=\dfrac{1}{x}$

3) on pose $h(x)=\frac{1}{x}$

a) résoudre dans $\mathbb{R}^*$: $-2 \leq \frac{1}{x} \leq 1$ (1.5 pt)

b) exprimer $(F \circ h)(x)$ en fonction de x (2 pts)

Exercice 2

On considère la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par : $G(x)=E(2x)-E(x)-E\left(x+\frac{1}{2}\right)$

1) vérifier que $T=1$ est une période de G (1 pt)

2) exprimer $G(x)$ dans chacun des intervalles $\left[0,\frac{1}{2}\right[$ et $\left[\frac{1}{2},1\right[$ (1.5 pt)

3) en déduire que $(\forall x \in \mathbb{R})$ $E(x)+E\left(x+\frac{1}{2}\right)=E(2x)$ (1.5 pt)

Exercice « bonus »

Exercice 6.

Soit ABC un triangle isocèle en A tel que BC = 8 cm et BA = 5 cm. Soit I le milieu de [BC].

1) Placer le point F tel que $\overrightarrow{BF} = -\overrightarrow{BA}$ et montrer que F est le barycentre des points A et B pondérés par des réels que l'on déterminera.

2) P étant un point du plan, réduire (en justifiant) chacune des sommes suivantes :

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{PB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{PC}$$

$$-\overrightarrow{PA} + 2\overrightarrow{PB}$$

$$2\overrightarrow{PB} - 2\overrightarrow{PA}$$

3) Déterminer et représenter l'ensemble des points M du plan vérifiant :

$$\left\|\frac{1}{2}\overrightarrow{MB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\right\|.$$

4) et représenter l'ensemble des points N du plan vérifiant :

$$\left\|\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC}\right\| = \left\|2\overrightarrow{NB} - 2\overrightarrow{NA}\right\|.$$

Barycentres de trois points et plus.

Exercice 7. Le centre de gravité comme isobarycentre.

ABC est un triangle, A' est le milieu de [BC]. On se propose de démontrer la propriété :

« G est le centre de gravité du triangle ABC » équivaut à « $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ ».

1) Quelle égalité vectorielle entre $\overrightarrow{GA}$ et $\overrightarrow{GA'}$ caractérise le centre de gravité G ?

2) a) Prouver que $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=2\overrightarrow{GA'}$.

b) En déduire la propriété énoncée au début de l'exercice.

3) a) Quelle interprétation cette propriété peut-on donner en physique ?

b) Traduire l'égalité $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ en terme de barycentre.

Exercice 8.

Soit ABCD un carré et K le barycentre des points pondérés (A, 2), (B, – 1), (C, 2) et (D, 1).

On note I le barycentre des points pondérés (A, 2), (B, – 1) et J celui de (C, 2) et (D, 1).

1) Placer I et J en justifiant.

2) Réduire l'écriture des vecteurs suivants : $2\overrightarrow{KA}-\overrightarrow{KB}$ et $2\overrightarrow{KC}+\overrightarrow{KD}$.

En déduire que K est le barycentre de (I, 1) et (J, 3).

3) Placer K en justifiant.

Exercice 4. $ABCD$ un parallélogramme, E et F deux points tels que $\overrightarrow{AF} = k\overrightarrow{AB}$ et $(1-k)\,\overrightarrow{AE} = k\overrightarrow{AD}$ avec $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$.

1. Vérifier que C est un barycentre des points A, B et D en déterminant ses pondérations.
2. Montrer que C, E et F sont alignés.
3. Déterminer k pour que C soit le centre de $[EF]$.

Exercice 5. ABC un triangle. Soit E le barycentre de $(B,1)$ et $(C,-3)$ et soit F le barycentre de $(A,2)$ et $(B,1)$

1. Faire une figure.
2. Montrer que $(CF) \parallel (AE)$.

Exercice 6. On considère un triangle ABC du plan.

1. (a) Déterminer et construire le point G, barycentre de $\{(A,1)\,,(B,-1)\,,(C,1)\}$
   (b) Déterminer et construire le point G', barycentre de $\{(A,1)\,,(B,5)\,,(C,-2)\}$
2. (a) Soit J le milieu de $[AB]$. Exprimer $\overrightarrow{GG'}$ et $\overrightarrow{JG'}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ et en déduire l'intersection des droites (GG') et (AB).
   (b) Montrer que le barycentre I de $\{(B,2)\,,(C,-1)\}$ appartient à (GG').
3. Soit D un point quelconque du plan. Soient O le milieu de $[CD]$ et K le milieu de $[OA]$.