EXERCICE1 : (10 points)

Partie I

Pour tout entier naturel **non nul** n , on considère la fonction f_n définie sur $I=[0,+\infty[$

par : $f_n(0)=0$ et $(\forall x\in]0,+\infty[)$; $f_n(x)=\sqrt{x}(\ln x)^n$

et soit (C_n) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$

0.5 1-a) Vérifier que : $(\forall x\in]0,+\infty[)$; $\sqrt{x}(\ln x)^n=(2n)^n\left(x^{\frac{1}{2n}}\ln\left(x^{\frac{1}{2n}}\right)\right)^n$, en déduire que f_n est continue à droite en 0

0.25 b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$

0.75 c) Vérifier que : $(\forall x\in]0,+\infty[)$; $\dfrac{f_n(x)}{x}=(2n)^n\left(\dfrac{\ln\left(x^{\frac{1}{2n}}\right)}{x^{\frac{1}{2n}}}\right)^n$, en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f_n(x)}{x}$

puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

0.5 d) Calculer, suivant la parité de n, $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f_n(x)}{x}$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

0.75 2-a) Montrer que f_n est dérivable sur $]0;+\infty[$ et que :

$$(\forall x\in]0,+\infty[)\ ;\quad f_n'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}(\ln x)^{n-1}(2n+\ln x)$$

0.25 b) Vérifier que : $\forall n\geq 2$, $f_n'(x)=0$ si et seulement si $(x=1$ ou $x=e^{-2n})$

1 c) Étudier, suivant la parité de n, le sens de variation de f_n et donner son tableau de variations.

0.25 d) Montrer que si n est impair et $n \geq 3$ alors le point d'abscisse 1 est un point d'inflexion de (C_n)

Partie II :

1- Soit $\beta \in]1, e[$ un réel fixé. On considère la suite numérique $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad ; \quad u_n = f_n(\beta)$$

0.25 a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad ; \quad 0 < u_n < \sqrt{e}$

0.25 b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.

0.25 c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

0.5 2-a) Montrer que pour tout entier n non nul, il existe un unique réel $x_n \in]1; e[$ tel que : $f_n(x_n) = 1$

0.75 b) Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ainsi définie est croissante, en déduire qu'elle est convergente.

3- On pose : $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$

0.5 a) Montrer que : $1 < \ell \leq e$

0.25 b) Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} (\ln x_n)^n = \dfrac{1}{\sqrt{\ell}}$

0.25 c) Montrer que si $\ell < e$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln(\ln x_n) = -\infty$

0.25 d) En déduire la valeur de ℓ

Partie III :

Exercice 1

Calculer les limites suivantes

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(x^2+1)}{x} \quad , \quad \lim_{x\to0}\frac{\ln(\cos x)}{x} \quad , \quad \lim_{\substack{x\to0\\x>0}} x^3(\ln x)^4 \quad , \quad \lim_{\substack{x\to0\\x>0}} \sqrt{x}\,\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(2+3\sqrt{x})}{\ln(1+2x^2)} \quad , \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x\,\ln(x+1)}{x} \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{2x+1}{2x+3}\right) \quad , \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^3}{x^2}$$

Exercice 2

Résoudre les équations et inéquations ci-dessous

1) $2\ln(x-2)-\ln(x+3)=0$, $(\ln x)^2-3\ln x+2=0$, $(\ln x)^3-\ln x=0$

2) $\ln(x^2-x)+\ln\left(\frac{1}{3x+4}\right)<0$, $\ln x-2\geq\frac{4}{\ln x}$, $\ln x>-1+\ln 2$

Exercice 3

1) montrer que $(\forall x\in\,]0,+\infty[)\ \ln(1+x)\leq x\leq(x+1)\ln(1+x)$

2) a) montrer que : $\prod_{k=1}^{k=n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\leq e^n\leq\prod_{k=1}^{k=n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1}$

b) en déduire $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{n!}$

Exercice 6

1) montrer que $\left(\forall x \in \mathbb{R}^{+*}\right) \quad \ln x \leq x-1$

2) soit n de $\mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. $x_1 ; x_2 ; \ldots\ldots ; x_n$ و $\alpha_1 ; \alpha_2 ; \ldots\ldots ; \alpha_n$ des réels de $\mathbb{R}^{*+}$

Tels que $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1$ on pose $y = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$

a) Montrer que pour tout k de $\{1;2;\ldots\ldots;n\}$ on a : $\alpha_k \ln\left(\frac{x_k}{y}\right) \leq \frac{\alpha_k x_k}{y} - \alpha_k$

b) En déduire que : $\sum_{k=1}^{k=n} \alpha_k \ln(x_k) \leq \ln\left(\sum_{k=1}^{k=n} \alpha_k x_k\right)$

c) Montrer que : $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} \ln(x_k) \leq \ln\left(\frac{\sum_{k=1}^{k=n} x_k}{n}\right)$

d) Prouver que $\sqrt[x]{x_1 x_2 \ldots\ldots x_n} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} x_k$

e) Montrer que $n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$

En déduire que $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \ldots\ldots + \frac{x_n}{x_1} \geq n$ pour tous $x_1 ; x_2 ; \ldots\ldots ; x_n$ de $\mathbb{R}^{*+}$

Exercice 7

1) montrer que $(\forall x > 0) \quad x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$

2) on pose $U_n = \sum_{k=1}^{k=n} \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$ pour tout entier naturel n non nul

a) calculer U_1 ; U_2

b) montrer que $(U_n)_n$ est convergente (on donne $\sum_{k=1}^{k=n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$)

3) on pose $V_n = \prod_{k=1}^{k=n}\left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$ pour n de $\mathbb{N}^*$.

montrer que $(V_n)_n$ est convergente et déterminer sa limite

Exercice 8

Exercice 8

Soit x de $]0,+\infty[$ on considère la fonction φ définie par :

$$\varphi(t)=x^2(\ln(1+t)-t)-t^2(\ln(1+x)-x)$$

1) montrer que φ vérifier les conditions de rool sur $[0,x]$

2) en déduire qu'il existe un réel c tel que $\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}=\dfrac{-1}{2(1+c)}$

3) déduire que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}=-\dfrac{1}{2}$

4) déterminer $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}$

Exercice n°3:

I) Soit f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} x + (1-x)\ln(1-x) & si \ x \neq 1 \\ 1 & si \ x = 1 \end{cases}$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Déterminer le domaine D de f.

2) a) Etudier la continuité de f sur D.

b) Etudier la dérivabilité de f à gauche en 1. Interpréter graphiquement ce résultat.

3) Etudier les variations de f.

4) Tracer la courbe représentative (C) de f dans un repère orthonormé.

II) On pose, pour tout $x \in [0,1[$, $g(x)=f'(x)$.

1) Etudier les variations de g.

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et k un entier tel que $0 \leq k \leq n-2$.

a) Montrer que pour tout $x \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$ on a : $g\left(\frac{k}{n}\right) \leq g(x) \leq g\left(\frac{k+1}{n}\right)$.

b) En déduire que : $\frac{1}{n} g\left(\frac{k}{n}\right) \leq f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \frac{1}{n} g\left(\frac{k+1}{n}\right)$.

3) On pose: $U_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right)$.

a) Montrer que $\frac{1}{n} \ln\left(\frac{1}{n}\right) + 1 - \frac{1}{n} \leq U_n \leq 1 - \frac{1}{n}$.

b) En déduire que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite.

4) Montrer que $U_n = \ln\left(\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}\right)$. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$.

1

1- بين أن : $\ln\left(\sqrt{5}-2\right)^{10}+\ln\left(\sqrt{5}+2\right)^{10}=0$

2- بين أن : $\ln\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)+\ln\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)=\frac{\ln 2}{2}$

3- بين أن : $\left(\forall a\in IR^{+*}\right)\left(\forall b\in IR^{+*}\right)\quad \frac{\ln a+\ln b}{2}\leq \ln\left(\frac{a+b}{2}\right)$

2

حل في IR المعادلات التالية :

(1) : $\ln x=2\ln 2+\ln 3$

(2) : $2-\ln(x+1)=0$

(3) : $|\ln(x+1)|-\ln|2-x|=0$

(4) : $\ln(\ln x)=\ln 3-4\ln\sqrt{2}$

(5) : $\sqrt{\ln x-1}=2$

(6) : $\sqrt{\ln x}=\ln\left(\sqrt{x}\right)$

(7) : $2\left(\ln x\right)^2-5\ln x+3=0$

(8) : $\frac{2+\ln x}{1-\ln x}=-2\ln x$

9

نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي : $f(x)=\ln(\ln x)$

1- حدد D مجموعة تعريف الدالة f ثم أدرس تغيرات الدالة f على D

2- بين أن : $0 \leq f(k+1)-f(k) \leq \dfrac{1}{k\ln k}$ $\quad \left(\forall k \in IN^* \setminus \{1\}\right)$

3- استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ حيث : $S_n=\sum\limits_{k=2}^{n}\dfrac{1}{k\ln k}$

10

1- بين أن : $x-\dfrac{1}{2}x^2 \leq \ln(1+x) \leq x$ $\quad (\forall x \rangle 0)$

2- استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ حيث : $u_n=\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)\left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)....\left(1+\dfrac{n}{n^2}\right)$ $\quad (\forall n \in IN^*)$

3 Soit a un réel de $\mathbb{R}^{+*}$.

on considère la suite $U_n = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{a+k}$ et la fonction $f(x) = \ln(x+a)$

1) montrer que $(\forall k \in \{0,1,....,n-1\})$ $\frac{1}{a+k+1} \leq f(k+1) - f(k) \leq \frac{1}{a+k}$

2) prouver que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $\ln\left(1+\frac{n}{a}\right) \leq U_n \leq \frac{1}{a} + \ln\left(1+\frac{n}{a}\right)$

3) déterminer les limites $\lim_{n\to+\infty} U_n$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{U_n}{n}$

2 On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x) = \ln x - 2\arctan x$

1) calculer les limites $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$

2) calculer la dérivée $f'(x)$ et étudier le sens de variation de f puis dresser le tableau des variations

3) a) prouver que l'équation $f(x) = 2n$ admet une unique solution notée a_n

b) vérifier que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad e^{2n} < a_n$ et déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$

4) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \ln\left(\dfrac{a_n}{e^{2n}}\right) = 2\arctan(a_n)$ en déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{e^{2n}} = e^{\pi}$

5) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \ln\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right) = 2\left(\arctan(a_n) - \arctan(a_{n+1}) - 1\right)$ en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{a_{n+1}}$