Exercice 26 : Soit f une fonction numérique

tq : $f(x) = \frac{2x^2+3}{x^2+1}$

1)Déterminer D_f

2) a) Démontrer que f est majorée par 3.

b) est ce que 3 est une valeur maximale de f ?

3) a) Démontrer que f est minorée par 2.

b) est ce que 2 est une valeur minimale de f. ?

Solution :

Exercice 1

Soit g la fonction définie par : $g(x) = x^2 - \frac{2}{x} + 1$

1) montrer que g est croissante sur $]1, +\infty[$

2) on considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^3 + x - 2}}$$

a) montrer que $D_f =]1, +\infty[$

b) vérifier que $(\forall x \in D_f) \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{g(x)}}$

c) en déduire le sens de variation de f

Exercice 2

on considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x}$$

1) Montrer que f minorée

2) a) montrer que f est majorée par $\frac{1}{2}$

b) $\frac{1}{2}$ est-elle une valeur maximale de f ?

3) on pose $h(x) = \sqrt{x-1}$ et $g(x) = \frac{x}{x^2+1}$

a) montrer que $T_g = \frac{1-xy}{(1+x^2)(1+y^2)}$

b) étudier les variations de g sur $[0,1]$ et sur $[1,+\infty[$

c) soient a et b deux réels de $\mathbb{R}^{*+}$ tels que :

$a+b \geq 2$. montrer que $a+b+\frac{1}{a+b} \geq \frac{5}{2}$

d) vérifier que $f = g \circ h$ puis étudier les variations de f sur D_f

Exercice 3

soient a , b et c des réels de $\mathbb{R}^+$

on considère la fonction f définie par :

$$f\left(x\right) = x^2 - \left(b + c\right)x + b^2 + c^2 - bc$$

1) dresser le tableau de variations de f

2) en déduire que $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$

Exercice 6

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$

1) déterminer le domaine D et montrer que la droite (Δ) $x = \frac{1}{2}$ est axe de symétrie

2) a) en utilisant un raisonnement par équivalence successive montrer que f est minorée par 1

b) 1 est-elle valeur minimale de f ?

3) calculer $\left(f(x)\right)^2$ puis déduire que f est majorée par $\sqrt{2}$. $\sqrt{2}$ est-elle valeur maximale de f ?

4) a) montrer que :

$$T_f = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} - \frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}}$$

b) étudier les variations de f sur $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ et $\left[\frac{1}{2},1\right]$

5) on pose $h(x) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{x}}$ et $g(x) = \frac{2}{x}$

a) montrer que $h = f \circ g$ puis étudier les variations de h

TD-ENSEMBLES ET APPLICATIONS
Exercices d'application et de réflexions

Exercice1 :1)Ecrire en extension les ensembles suivants : $D_{180} = \{n \in \mathbb{N} / n/180\}$

$A = \left\{ n \in \mathbb{Z} / \frac{-5}{2} \leq n^2 \leq \frac{3}{2} \right\}$;

$B = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + x + 1 = 0\}$

2)Ecrire en compréhension l'ensemble Des nombres pairs

Exercice2 :1) Ecrire en extension les ensembles suivants :

$E_1 = \{k \in \mathbb{Z} / |k+1| \leq 2\}$

$E_2 = \{x \in \mathbb{Z} / k^2 \leq 7\}$

$E_3 = \{k \in \mathbb{Z} / 7 \leq k^2 \leq 35\}$

$E_4 = \{(x;y) \in \mathbb{N}^2 / (x+y)(x-y) = 32\}$

$E_5 = \{(x;y) \in \mathbb{N}^2 / x^2 - y^2 = 15\}$

$E_6 = \{(x;y) \in \mathbb{Z}^2 / 0 \prec 2xy \leq 7\}$

$E_7 = \left\{ x \in \mathbb{Z}^* / (\forall n \in \mathbb{N}) \frac{1}{x} \geq \frac{n}{n+1} \right\}$

$E_8 = \{x \in \mathbb{Z} / (\forall n \in \mathbb{N}) x^2 \leq 4 + n^3\}$

$E_9 = \{(x;y) \in \mathbb{N}^2 / 0 \prec 2x \leq y \leq 5\}$

$E_{10} = \left\{ x \in \mathbb{Q} / x = \frac{p}{q} \, et \, p;q \in \mathbb{N}^* \right.$ Vérifiant $\left. p \leq 3q \leq 11 \right\}$

2)Ecrire en compréhension l'ensemble Des multiples de 5 dans $\mathbb{N}$

Exercice3 : Ecrire en extension les ensembles suivants : $A = \left\{ \cos\left(\frac{\pi}{5} + \frac{n\pi}{6} \right) : n \in \mathbb{Z} \right\}$

$B = \left\{ \sin\left(\frac{\pi}{12} + \frac{n\pi}{6} \right) : n \in \mathbb{Z} \right\}$

Exercice4 : $A = \{k \in \mathbb{Z} / |2k+1| \leq 3\}$ et $B = \{-2, -1, 0, 1\}$

Montrons que : $A = B$

Exercice5 : Soit $E = \{0;1;2\}$ } déterminer tous les ensembles inclus dans E. Qui s'appelle l'ensemble des parties de E et se note $\mathcal{P}(E)$.

Exercice6 : Ecrire en extension les ensembles suivants :1) $P(P(\varnothing))$ 2) $P(P(\{a;b\}))$

Exercice7 : donner Complémentaire des ensembles suivants : $[a;b[$ l'ensemble $\mathbb{Q}$

2) l'intervalle $[a;b[$ $a \prec b$

Exercice8 :Soient les ensembles :

$A = \left\{ \frac{\pi}{4} + 2\frac{k\pi}{5} : k \in \mathbb{Z} \right\}$ $B = \left\{ \frac{\pi}{2} + 2\frac{k\pi}{5} : k \in \mathbb{Z} \right\}$

Monter que : $A \cap B = \varnothing$

Exercice9 : Soient A ; B ; C et D des parties d'un ensemble E

Monter que : $\begin{cases} (\overline{B-C}) \cup A = E \\ (\overline{C-D}) \cup A = E \end{cases} \Rightarrow (B-D) \subset A$

Exercice10 : Soient A ; B ; C des ensembles

Monter que : $A \subset B \subset C \Leftrightarrow A \cup B = B \cap C$

Exercice11 : Soient A ; B ; C des parties d'un ensemble E

Monter que :

1) $A = (A \cap B \cap C) \cup (A \cap \overline{B} \cap C) \cup (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (A \cap B \cap \overline{C})$

2) $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$

3) $A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C} \Leftrightarrow A \cap B = A \cap C$

Exercice12 : Soient A ; B ; C des parties d'un ensemble E

Monter que : $\begin{cases} A \cup B \subset A \cup C \\ A \cap B \subset A \cap C \end{cases} \Rightarrow B \subset C$

Exercice13 : Soient A ; B ; C des parties d'un ensemble E

La différence symétrique de A et B c'est l'ensemble Qu'on note : $A \Delta B$ tel que : $A \Delta B = (A-B) \cup (B-A)$

1)Monter que : $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$

2)Monter que : $\overline{A} \Delta \overline{B} = A \Delta B$

3)Monter que : $\forall C \in P(E)$: $A \Delta B = A \Delta C \Leftrightarrow B = C$

Exercice14 :Soit l'ensemble :

$E=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 / x^2+xy-2y^2+5=0\}$

1) a)vérifier que :

$\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+xy-2y^2=(x-y)(x+2y)$

b) Ecrire en extension l'ensemble $E\cap\mathbb{Z}^2$

c) montrer que : $E=\left\{\left(\frac{2t^2-5}{3t};\frac{-t^2-5}{3t}\right)/ t\in\mathbb{R}^*\right\}$

4) Ecrire en compréhension les ensembles suivants :

$A=\{0;1;4;9;16;...\}$ et $B=\left\{-1;\frac{1}{2};-\frac{1}{3};\frac{1}{4};...\right\}$

$C=\{...;-5;-2;1;4;7;...\}$

Exercice15 :soient E et F deux ensembles et A et B deux parties respectives de E et F

1)déterminer le complémentaire de $A\times F$ dans $E\times F$

2)déterminer le complémentaire de $E\times F$ dans $E\times F$

3)déterminer le complémentaire de $A\times B$ dans $E\times F$

Exercice17 : soient l'ensemble :

$L=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 / x^2+y^2\le 1\}$

Monter qu'il n'existe pas deux parties A et B de $\mathbb{R}$ tels que : $L=A\times B$

Exercice18 : Soient les ensembles :

$H=\left\{y\in\mathbb{R} / y=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} : x\in\mathbb{R}\right\}$

$G=\left\{y\in\mathbb{R} / y=\frac{1}{1+\sqrt{x^2+1}} : x\in\mathbb{R}\right\}$

1- montrer que : H =]0,1].

a- Considérer un élément $y_0\in H$

et montrer que $y_0\in$]0,1]

b- Considérer un élément $y_0\in$]0,1]

et montrer que $y_0\in H$

2- Monter que $G\subset H$

3- Est-ce que $G=H$?

Exercice19 : soit a un nombre réel on considère les deux ensembles suivants :

$E=\{x\in\mathbb{Z} / |x+1|\le 3\}$ et $F=\{x\in\mathbb{Z} / |2x-a|\le 4\}$

1) Ecrire E en extension

2) déterminer les valeurs possibles de a pour lesquelles $E\cap F=\varnothing$

3) déterminer les valeurs possibles de a pour lesquelles $\mathbb{N}\cap F=\varnothing$

4) déterminer les valeurs possibles de a pour lesquelles $F\subset\mathbb{N}$

Exercice20 : on considère dans $\mathbb{Z}$ les deux parties suivantes :

$A=\left\{x\in\mathbb{Z} / \frac{4x^2-4x+10}{2x-1}\in\mathbb{Z}\right\}$ et $B=\left\{x\in\mathbb{Z} / \frac{x+10}{x-5}\in\mathbb{Z}\right\}$

1)a) montrer que $(\forall x\in\mathbb{Z}-\{5\})\frac{x+10}{x-5}=1+\frac{15}{x-5}$

1)b) montrer que $(\forall x\in\mathbb{Z})\frac{4x^2-4x+10}{2x-1}=2x-1+\frac{9}{2x-1}$

2) déterminer : A ; B; $A-B$; $B-A$ et $A\Delta B$ en extension

3)on admet que l'opération est associative dans l'ensembles des parties de $\mathbb{Z}$: $P(\mathbb{Z})$

Résoudre dans $P(\mathbb{Z})$ l'équation : $A\Delta X=B$

Exercice21 :Soient les ensembles :

$E=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 / x^2-xy-2y^2=0\}$

$F=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 / x+y=0\}$

1) montrer que : $F\subset E$

2)déterminer y de $\mathbb{R}$ tel que : $(1;y)\in E$; est ce que on a $E\subset F$?

3) montrer que : $E=F\cup G$ ou G est un ensemble à déterminer

4) Soient les ensembles :

$A=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 / y=x+1+\sqrt{x^2+1}=0\}$

$B=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 / y=x+1-\sqrt{x^2+1}=0\}$

a) montrer que : $H=A\cup B$

b) déterminer : $H\cap F$

Exercice22 :Soient A ; B ; C des parties d'un ensemble E

1)a)déterminer une condition suffisante de l'existence de X dans $P(E)$ tel que : $A\cup X=B$

b)résoudre dans $P(E)$ l'équation : $A\cup X=B$

2) on suppose que $C\subset A\subset B$

résoudre dans $P(E)$ le système : $\begin{cases}A\cup X=B\\ A\cap X=C\end{cases}$

Exercice23 : soit les 2 applications :

$f:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$, $n\mapsto(-1)^n$ et $g:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$, $n\mapsto\sin\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)$

Est-ce que $f=g$?

Exercice24 :soit l'application : $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$, $x\mapsto x+\sqrt{x}$

f est-elle injective ?

Exercice25: soit l'application : $\begin{array}{l} g:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto x^2-1 \end{array}$

g est-elle injective ?

Exercice26 :1) $\begin{array}{l} f:\mathbb{R}-\{2\}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto \dfrac{3x+1}{x-2} \end{array}$

Montrer que f est injective

2) $\begin{array}{l} g:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto x^2+4 \end{array}$ g est-elle injective ?

2) $\begin{array}{l} h:\mathbb{N}^*\to\mathbb{Q} \\ n\mapsto 1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+...+\dfrac{1}{n} \end{array}$

1- déterminer les images des entiers 1, 2, 3

2- Montrer que $n > m \Rightarrow h(n) > h(m)$

3- En déduire que h est injective.

Exercice27 : soit l'application : $\begin{array}{l} f:\mathbb{R}^+\to\,]-\infty;3] \\ x\mapsto 3-x^2 \end{array}$

f est-elle surjective de $\mathbb{R}^+$ vers $]-\infty;3]$.

Exercice28 : soit l'application : $\begin{array}{l} f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R} \\ x\mapsto 3-x^2 \end{array}$

f est-elle surjective de $\mathbb{R}^+$ vers $\mathbb{R}$. ?

Exercice29 :1) $\begin{array}{l} f:\mathbb{R}-\{2\}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto \dfrac{3x+1}{x-2} \end{array}$

a- f est-elle surjective de ℝ/{2} vers ℝ.

b- Modifier l'ensemble d'arrivé pour définir une application surjective.

2) $\begin{array}{l} f:\mathbb{R}\to[2;+\infty[\\ x\mapsto x^2-2x+3 \end{array}$

a- Montrer que la fonction g est surjective.

b- g est-elle injective ?

3) $\begin{array}{l} h:\mathbb{N}^*\to\mathbb{Q}\cap[1;+\infty[\\ n\mapsto 1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+...+\dfrac{1}{n} \end{array}$

h est-elle surjective ?

Exercice30 : soit l'application : $\begin{array}{l} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto 2-5x \end{array}$

f est-elle une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. ?

Exercice31 : $\begin{array}{l} f:[1;+\infty[\to[2;+\infty[\\ x\mapsto x^2-2x+3 \end{array}$

1- Montrer que f est une bijection de [1,+∞[vers [2,+∞[.

2- Soit y un élément de [2,+∞[, déterminer (en fonction de y) l'élément x dans [1,+∞[tel que $f(x) = y$

L'application qui lie l'élément y de [2,+∞[, à l'élément unique x de [1,+∞[et solution de l'équation $f(x) = y$ s'appelle : la bijection réciproque de la bijection $\boldsymbol{f}$ et se note : $f-1$

Exercice32 : soit l'application : $\begin{array}{l} f:]1;+\infty[\to]0;+\infty[\\ x\mapsto \dfrac{2}{x-1} \end{array}$

Montrer que f est une bijection et déterminer sa bijection réciproque.

Exercice33 :Déterminer la fonction réciproque de la fonction $\begin{array}{l} f:[1;+\infty[\to[2;+\infty[\\ x\mapsto x^2-2x+3 \end{array}$

Exercice34 :Soit la fonction g définie par :

$\begin{array}{l} g:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto \dfrac{x}{1+x^2} \end{array}$

Montrer que g est une bijection et déterminer sa bijection réciproque.

Exercice35 :Soit $\begin{array}{l} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto 2x^2-x \end{array}$

1- Montrer que $\forall x\in[-1;1]\quad f(x)\in\left[\dfrac{-3}{16};3\right]$

2- Montrer que : $\forall y\in\left[\dfrac{-3}{16};3\right]\ \exists x\in[-1;1]$ / ($f(x) = y$)

on dit que l'image de l'intervalle $[-1;1]$ par l'application f est l'intervalle $\left[\dfrac{-3}{16};3\right]$ et on écrit :

$f([-1;1])=\left[\dfrac{-3}{16};3\right]$

Exercice36 : Soit $\begin{array}{l} h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R} \\ (x;y)\mapsto \dfrac{1}{x^2+y^2} \end{array}$

1- Déterminer les couples (x,y) qui vérifient $h((x,y)) = 1$

2- Représenter dans le plan muni d'un repère orthonormé les points $M\ (x, y)$ qui vérifient $h\ ((x, y)) = 1$.

Exercice37 :soit l'application : $\begin{array}{l} f:\mathbb{R}-\{-1\}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto \dfrac{3x-1}{x+1} \end{array}$

1) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}-\{-1\}\quad f(x)=3-\dfrac{4}{x+1}$

2)Déterminer : $f(K)$ avec $K=]-\infty;-1[$

Exercice38 : soit l'application : $\begin{array}{l} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto x^2 \end{array}$

Déterminer : $f^{-1}(B)$ avec $B=[-1;4]$

Exercice39 :soit l'application : $\begin{array}{l} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto \cos x\end{array}$

Déterminer : $f^{-1}(D)$ avec $D=]1;2]$

Exercice40 :Soit g : $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$x\mapsto \dfrac{3}{1+x^2}$ déterminer f−1([1,2]) $f^{-1}([1;2])$

Exercice41 :Soit l'application :

$\begin{array}{l} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto 3|1-x^2|+x\end{array}$ Ecrire l'expression de f sur [−1,1]

Exercice42 : Soit l'application

$\begin{array}{l} g:\mathbb{R}-\{1\}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto \dfrac{3x+1}{x-1}\end{array}$ 1- g est-elle bijective ?

2- A partir de g, définir une bijection de ℝ dans ℝ

Exercice43 :soit l'application : $\begin{array}{l} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto \sqrt{x^2-2x+1}\end{array}$

Déterminer la restriction de $\boldsymbol{f}$ sur l'intervalle $]-\infty;1]$

Exercice44 :soit l'application : $\begin{array}{l} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto 2x-|x|+3\end{array}$

Déterminer la restriction de $\boldsymbol{f}$ sur l'intervalle $]-\infty;0]$

Exercice45 : soit les applications :

$\begin{array}{l} f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R} \\ x\mapsto x\end{array}$ et $\begin{array}{l} g:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto 2|x|-x\end{array}$

Est-ce que g est un prolongement de $\boldsymbol{f}$?

Exercice46 : 1) Montrer que :

$(\forall x\in\mathbb{R})(\forall m\in\mathbb{Z})(E(m+x)=m+E(x))$.

2) Vérifier par un contre-exemple que :

$E(x+y)\neq E(x)+E(y)$

3) Soit l'application $\begin{array}{l} h:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto E(3x+1)+x\end{array}$

1- Vérifier que h n'est pas injective.

2- Donner la restriction de h sur l'intervalle $\left[0;\dfrac{1}{3}\right[$.

3- Déterminer : $h^{-1}\{4\}$ et $h^{-1}\{2\}$; h est-elle surjective ?.

Exercice47 : Soient les deux applications :

$\begin{array}{l} f:\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto \dfrac{1}{x^2}\end{array}$ et $\begin{array}{l} g:\mathbb{R}-\{1\}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto \dfrac{x}{x-1}\end{array}$

1- Déterminer $f(g(3))$; $f(g(-1))$ $g(f(3))$

2- Donner la condition sur x pour que le réel $g(f(x))$ existe.

3- Donner la condition sur x pour que le réel $f(g(x))$ existe.

4- Déterminer les application fog et gof.

Exercice48 : soit l'application : $\begin{array}{l} h:\mathbb{R}^+\to\left[\dfrac{1}{4};+\infty\right[\\ x\mapsto x+\sqrt{x}+\dfrac{1}{4}\end{array}$

1)Ecrire l'application h comme La composée de deux applications f et g : $h=g\circ f$

2)a)Montrer que f est une bijection et déterminer sa bijection réciproque

b) Montrer que g est une bijection et déterminer sa bijection réciproque

c) en déduire que h est une bijection de $\mathbb{R}^+$ dans $\left[\dfrac{1}{4};+\infty\right[$ et déterminer sa bijection réciproque

Exercice49 : soient les applications :

$\begin{array}{l} f:]1;+\infty[\to]1;+\infty[\\ x\mapsto 1+\dfrac{2}{\sqrt{x}-1}\end{array}$ et $\begin{array}{l} g:]1;+\infty[\to]1;+\infty[\\ x\mapsto \left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)^2\end{array}$

1)Déterminer : $f([2;4[)$ et $g^{-1}(\{9\})$

2)Montrer que f est une bijection de $]1;+\infty[$ dans $]1;+\infty[$ et déterminer sa bijection réciproque

3)a)vérifier que : $\forall x\in]1;+\infty[:g(x)=(f(x))^2$

3)b)en déduire que : g est une bijection de $]1;+\infty[$ dans $]1;+\infty[$ et déterminer sa bijection réciproque

Exercice50 :Soient les ensembles :

$E=\left\{x\in]-\pi;2\pi[\ /\ \tan x=\sqrt{3}:x\in\mathbb{R}\right\}$

$F=\left\{x\in]-\pi;2\pi[\ /\ x=\dfrac{\pi}{6}+k\pi:k\in\mathbb{Z}\right\}$

$G=\left\{x\in]-\pi;2\pi[\ /\ x=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k}{2}\pi:k\in\mathbb{Z}\right\}$

$S=\left\{\dfrac{-5\pi}{3};\dfrac{-\pi}{3};\dfrac{\pi}{6};\dfrac{2\pi}{3};\dfrac{7\pi}{6};\dfrac{5\pi}{3}\right\}$

Vérifier que : $S\subseteq E$ et $E\subseteq S$ et que $E=S$ et $E=G$

Vérifier que: $\dfrac{\pi}{8}$ n'est pas un élément de E et que $E\neq F$

Exercice51 :Soient $A=\left\{\dfrac{5n+8}{8n-1}/n\in\mathbb{N}\right\}$ et

$B=\left\{\dfrac{2n+4}{2n-1}/n\in\mathbb{N}\right\}$

1- Est ce que : $\frac{17}{3} \in A$? $\frac{43}{25} \in B$? $\frac{42}{37} \in B$?

2- montrer que $\frac{6}{5}$ est un élément commun entre A et B.

Exercice52 :Soit la fonction f définie par :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{x}{1+x^2}$$

$$\overline{A} = \{x \in E \,/\, x \notin A\}$$

1-Montrer que chaque élément de $\mathbb{R}$ à une image.
2- l'implication suivante est-elle vraie :
(P) $(a \neq b) \Rightarrow (f(a) \neq f(b))$.

3-Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R})$ $f(x) \in \left[\frac{-1}{2};\frac{1}{2}\right]$

4- Montrer que $(\forall y \in \left[\frac{-1}{2};\frac{1}{2}\right]$ $(\exists x \in \mathbb{R})\left(f(x) = y\right)$

Exercice53 Soient les deux applications suivantes :

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$
$n \mapsto (-1)^n \times n$

et

$g : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$
$n \mapsto \begin{cases} n.\text{si}.n.pair \\ -n.si.n.impair \end{cases}$

Vérifier que $(\forall n \in \mathbb{N})(f(n) = g(n))$