Exercice 2

1) a) en utilisant le théorème des accroissement finis montrer que

$$(\forall x \geq 0) \quad \frac{x}{1+x^2} \leq \arctan x \leq x$$

b) déduire la limite $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \arctan x}{x^2}$

2) utiliser le théorème des accroissement finis et montrer que

$$(\forall x > 1) \quad \arctan(x+1) - \arctan x \leq \frac{1}{1+x^2} \leq \arctan x - \arctan(x-1)$$

3) a) utiliser le théorème des accroissement finis et montrer que

$$(\forall x \geq 0) \quad \sin x \leq x$$

b) démontrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad \cos x \geq 1 - \dfrac{x^2}{2}$

4) en utilisant le théorème des accroissement finis calculer la limite

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt[n]{x^{n-1}} \left(\sqrt[n]{x+1} - \sqrt[n]{x} \right)$$

Exercice 3

EXERCICE (5)

On pose $S_n = \sum_{p=1}^{p=n} \frac{1}{\sqrt{p}}$ et soit la suite $(U_n)_n$ définie par : $U_n = \frac{S_n}{\sqrt{n}}$

1) montrer que $(\forall p \in \mathbb{N}^*)$ $2\left(\sqrt{p+1} - \sqrt{p}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{p}}$

2) déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $S_n \geq 2\sqrt{n+1} - 2$ et déterminer $\lim_{n \to +\infty} S_n$

3) monter par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $S_n \leq \sqrt{n} + \sqrt{n-1}$

Puis déduire $\lim_{n \to +\infty} U_n$

EXERCICE (6)

Déterminer dans chacun des cas suivants la limite de la suite $(U_n)_n$

1) $U_n = 5 \times 3^{n+1} - 2 \times 5^n$; 2) $U_n = 2^n \sin\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)$ و $x \in \mathbb{R}^*$

3) $U_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{k=n} k$ $U_n = \sum_{k=2}^{k=n} \frac{2}{k^2 - 1}$ 4) $U_{n+1} \geq 2U_n$ et $U_0 \in \mathbb{R}^{*+}$

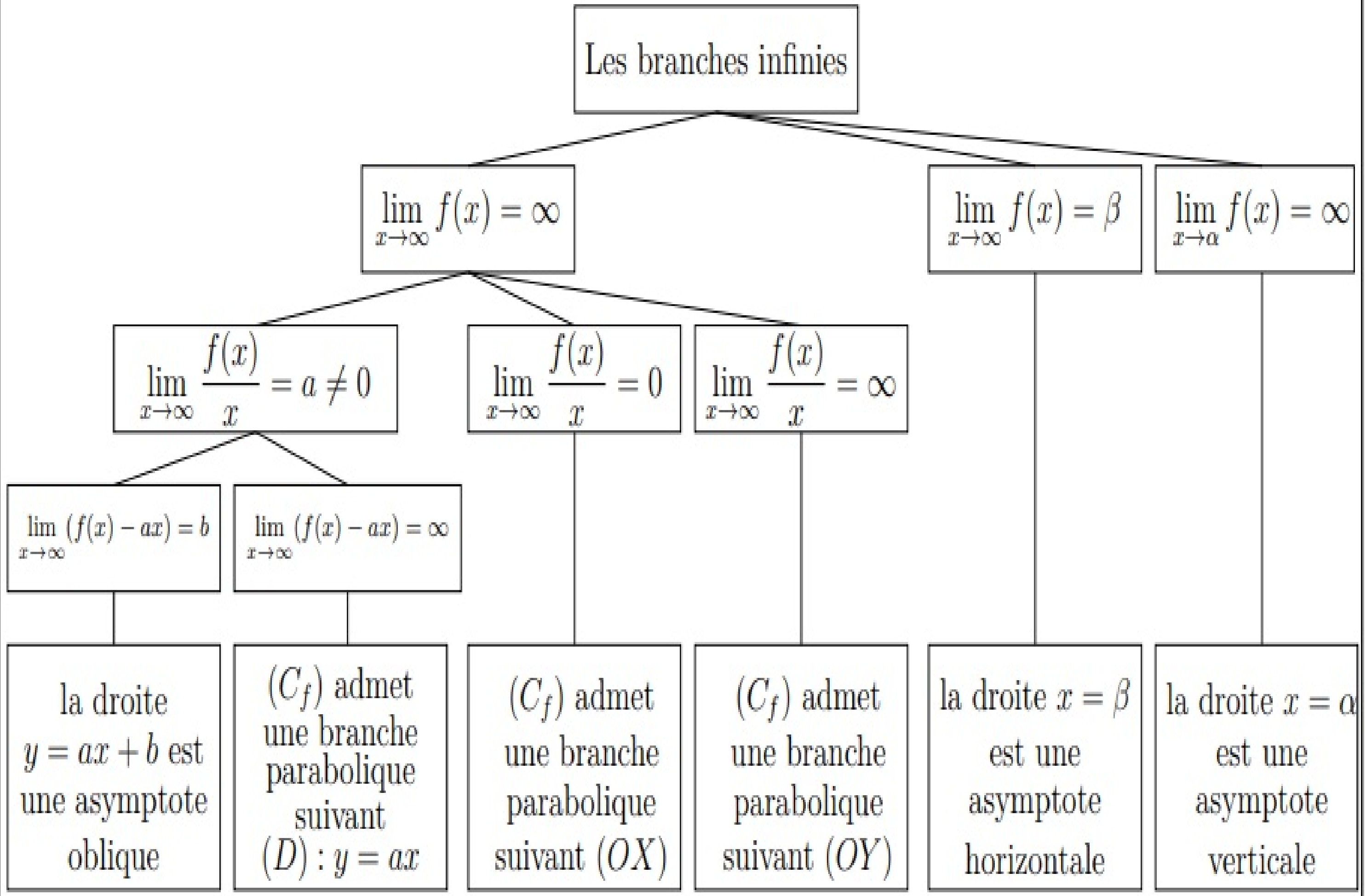
5) $U_n = \sum_{p=1}^{p=n} \frac{1}{4p^2 - 1}$ 6) $U_n = \sin^2\left(\pi\sqrt{n^2 + n}\right)$

7) $U_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} E(kx)$ et $x \in \mathbb{R}^*$ 8) $U_n = \frac{2^n}{n^3}$ 9) $U_n = \frac{\sqrt{n}}{2^n}$

10) $U_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{(-1)^{k+1}}{3^k}$ 11) $U_n = \sum_{k=1}^{k=n^2} \frac{1}{1 + \sqrt{kn}}$

12) $U_n = \sum_{p=1}^{p=n} \frac{1}{\sqrt{p+1} + \sqrt{p}}$

5 Les branches infinies



La droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $\pm\infty$ $\iff \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$

Attention ⚠

$\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - ax) = \pm\infty \not\Rightarrow$ (C_f) admet une branche parabolique suivant La droite d'équation $y = ax$ au voisinage de $\pm\infty$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$0 \,\|$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

→ $\lim_{0^+} \frac{f(x)}{x} = 0$ et $\lim_{0^-} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

→ $\lim_{-\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ et $\lim_{+\infty} f(x) - x = 0$

→ $f(\alpha) = 0$, $3 < \alpha < 4$

Tracer$(\mathcal{C}_f)$

Suites numériques

EXERCICE (1)

On pose $(\forall n \geq 1) \quad U_n = \frac{1}{2\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{k}}$

1) montrer que $(\forall k \geq 1) \quad \frac{1}{2\sqrt{k+1}} \leq \sqrt{k+1} - \sqrt{k} \leq \frac{1}{2\sqrt{k}}$

2) a) déduire un encadrement du terme U_n de la suite $(U_n)_{n\geq 1}$

b) déterminer la limite de $(U_n)_{n\geq 1}$

EXERCICE (2)

On pose $u_n = \sqrt[n]{n} - 1$ pour tout entier n tel que $n \geq 2$

1) montrer que $(\forall n \geq 2) \quad u_n \geq 0$

2) montrer que $(\forall n \geq 2) \quad n \geq C_n^2 (u_n)^2$ en déduire $(\forall n \geq 2) \quad u_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}}$

3) montrer que $(u_n)_n$ est convergente et déterminer sa limite

EXERCICE (3)

Soit n un entier de $\mathbb{N}^*$. on considère la fonction f_n définie sur $]0,1[$

par : $f_n(x) = \tan\left(\frac{\pi}{2}x\right) - \frac{\pi}{2nx}$

1) montrer que $f_n(x) = 0$ admet une unique solution notée α_n

2) montrer que $(\alpha_n)_n$ est décroissante et qu'elle est convergente

3) montrer que $\lim_{n \to +\infty} \alpha_n = 0$

4) déterminer la limite de $\lim_{n \to +\infty} \alpha_n \sqrt{n}$

EXERCICE (4)

Dans chacun des deux cas montrer que $(u_n)_n$ *et* $(v_n)_n$ sont adjacentes

1) $u_n = \left(\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) - 2\sqrt{n+1} \quad ; \quad v_n = \left(\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) - 2\sqrt{n}$

2) $u_n = \prod_{k=1}^{k=n} \cos\left(\frac{\pi}{2^k}\right) \quad ; \quad v_n = u_n \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$

EXERCICE (4)

on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \arctan\sqrt{x+2} & ; \quad x \geq -2 \\ f(x) = x+2-\sqrt{x^2+2x} & ; \quad x < -2 \end{cases}$

1) a) montrer que f est continue au point -2

b) étudier la dérivabilité de f à gauche et à droite du point -2

2) a) calculer la limite $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

b) étudier les branches infinies de la courbe (C_f)

3) a) calculer $f'(x)$ sur chacun des intervalles $]-\infty,-2[$ et $]-2,+\infty[$

b) étudier les variations de f et dresser sa table de variation

4) a) montrer que $(\forall x \in]-\infty,-2[)\ f(x) \geq 2x+3$

b) tracer la courbe (C_f)

5) soit g la restriction de la fonction f sur $]-\infty,-2[$

a) Montrer que g est une bijection de $]-\infty,-2[$ vers un intervalle J à déterminer

b) calculer $g^{-1}(x)$ pour tout x de J

c) tracer dans le repère précédant la courbe de la fonction réciproque g^{-1}

6) soit $(U_n)_n$ la suite définie par : $U_0 = 2$ et $U_{n+1} = f(U_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$

a) montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une seule solution α dans $[1,2]$

b) montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$ $\arctan x \leq x$

c) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$ $1 < U_n \leq 2$

d) étudier la monotonie de la suite $(U_n)_n$ puis déduire qu'elle est convergente et déterminer sa limite

فرض رقم 2

التمرين الأول :

لتكن $(U_n)_n$ متتالية معرفة بما يلي :

$$U_n = \sum_{p=0}^{p=2n+1} \frac{n}{n^2+p}$$ لكل عدد طبيعي غير منعدم n

1) بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad 2 - \frac{2}{n+1} \leq U_n \leq 2 + \frac{2}{n}$

2) أ- تحقق أن $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \sqrt{n} - \sqrt{n-1} \geq \frac{1}{2n}$

ب- استنتج أن $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \sum_{p=1}^{p=n} \frac{1}{p} \leq 2\sqrt{n}$

3) نضع $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} U_k$ لكل عدد طبيعي غير منعدم n

بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad 2n - 4\sqrt{n+1} \leq S_n \leq 2n + 4\sqrt{n}$

و حدد $\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n}$

التمرين الثاني :

لتكن $(U_n)_n$ متتالية هندسية حدودها غير منعدمة أساسها q .

لكل عدد طبيعي n نضع : $S = U_0 + U_1 + \ldots\ldots + U_{n-1}$

و $P = U_0 U_1 \ldots\ldots U_{n-1}$ و $T = \frac{1}{U_0} + \frac{1}{U_1} + \ldots\ldots + \frac{1}{U_{n-1}}$

1) بين أن $\frac{S}{T} = U_0^2 \, q^{n-1}$

2) استنتج أن $P^2 = \left(\frac{S}{T}\right)^n$

التمرين الثالث :

نعتبر المتتاليتين $(U_n)_n$ و $(V_n)_n$ المعرفتين بما يلي : $U_n = \sum_{k=0}^{k=2n+1} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ و $V_n = \sum_{k=0}^{k=2n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$

1) بين أن $(U_n)_n$ و $(V_n)_n$ متحاذيتين

2) نضع $f_n(x) = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}$

أ- بين أن $f_n'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{1+x^2}$

ب- أثبت أن $(\forall x \in \mathbb{R}^+) \quad f_{2n+1}(x) \leq \arctan x \leq f_{2n}(x)$

ج- استنتج نهاية كل من المتتاليتين $(U_n)_n$ و $(V_n)_n$

Exe 2

En utilisant le théorème des accroissements finis montrer :

1) $\left(\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right) \quad \sin x < x < \tan x$

2) $\left(\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right) \quad 1 - \cos x < x^2$

Exe 3

soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ (ab>0)

montrer que :

$$\left(\exists c \in \left]a,b\right[\right) \quad \frac{f(b)-f(a)}{b^3-a^3}=\frac{f'(c)}{3c^2}$$

en utilisant le théorème des accroissements finis calculer :

$$\lim_{x\to+\infty} x^3\left(\arctan x - \arctan\sqrt{x^2+1}\right)$$

et $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[5]{x+3}-\sqrt[5]{x}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x-2}} \times \sqrt[15]{x^2}$$

Exe 1

peut-on appliquer le théorème de rolle à f sur l'intervalle I :

1) $f(x) = \frac{|x|}{x^2 - 3}$; $I = [-2,2]$

2) $f(x) = x - E(x)$; $I = [1,2]$

3) $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$; $I = [0,1]$

4) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$; $I = [-1,1]$

$1+b^2$ $1+a^2$

Exercice 9 : En utilisant le Théorème des accroissements finies(T.A.F) donner un encadrement du nombre $\sqrt{10001}$ et en déduire une valeur approchée de $\sqrt{10001}$ avec la précision 5×10^{-5}.

Exercice 6 : Détermination d'une limite.

Considérons les deux fonctions :

$u(t) = Arctan(t) - t$ et $v(t) = t^2$ et soit $x \in \mathbb{R}^*$

1) Montrer qu'il existe c compris entre 0 et x tel que : $\dfrac{u(x)}{v(x)} = \dfrac{u'(c)}{v'(c)}$

2) En déduire la limite : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{ar\tan x - x}{x^2}$

Exercice 11 : Soit f une fonction définie sur l' intervalle $\left]\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right[$ par :

$f(x)=\frac{\pi}{2}-\sin x$ et la suite (u_n) définie par :

$u_{n+1}=f(u_n)$ $\forall n\in\mathbb{N}$ et $u_0\in\left]\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right[$

1)montrer que l'équation : $f(x) = x$ admet une solution unique $\alpha \in \left]\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right[$

2)montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$: $\frac{\pi}{6} \prec u_n \prec \frac{\pi}{2}$

3)a)montrer que : $\forall x \in \left]\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right[$ $|f'(x)| \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$

b)en déduire que : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{\sqrt{3}}{2}|u_n - \alpha|$ $\forall n \in \mathbb{N}$

f définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$

1) Montrer que $f(x) = x$ a une seule solution

α et $1 < \alpha < 2$

2) Montrer que $(\forall x \in [1,2]) \quad |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

3) Soit la suite $(U_n)_n$ définie par :

$U_0 = 2$ و $U_{n+1} = f(U_n)$

a) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 1 \leq U_n \leq 2$

b) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

c) Déduire que (U_n) est convergente et

c) Déduire que $\left(U_n\right)_n$ est convergente et calculer sa limite

4) On pose $T_n = (-1)^n \left(U_n - \alpha\right)$ و $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} T_k$

a) Montrer que $\left(\forall n \in \mathbb{N}\right) \quad U_{2n+1} \leq \alpha \leq U_{2n}$

en déduire que $\left(\forall n \in \mathbb{N}\right) \quad T_n \geq 0$

b) Etudier la monotonie de $\left(S_n\right)_n$ et montrer qu'elle est majorée

Exercice 9

$(\mathcal{U}_n)_n$ و $(\mathcal{V}_n)_n$ deux suites telles que :

$$\mathcal{U}_n = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{3^k} \quad \text{و} \quad \mathcal{V}_n = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{k}{3^k}$$

1) déterminer la limite de $(\mathcal{U}_n)_n$

2) a) vérifier que :

$(\forall n \in \mathbb{N}) \qquad 3\mathcal{V}_{n+1} = \mathcal{U}_n + \mathcal{V}_n$

b) en déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}) \qquad \mathcal{V}_n \leq 3$

c)montrer que $(\mathcal{V}_n)_n$ est convergente et déterminer sa limite

a) montrer que $(V_n)_n$ est géométrique

b) calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

Exercice 1

Soit a un réel de $]0,1[$ on considère la suite $(U_n)_{n\geq 1}$ définie par : $U_n = \prod_{k=0}^{k=n}\left(1+a^{2^k}\right)$

1) montrer que $(U_n)_{n\geq 1}$ est croissante

2) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $U_n = \dfrac{1-a^{2^{n+1}}}{1-a^2}$

3) en déduire que $(U_n)_{n\geq 1}$ est convergente

Soit n un entier naturel non nul .

On considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f_n(x) = x^3 + x^2 + nx - 2$

1) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution x_n

et que $0 < x_n < 1$

2) Vérifier que $f_{n+1}(x_n) = x_n$ puis déduire que $(x_n)_n$ est décroissante

Soit n un entier naturel non nul.

On considère la fonction F_n définie sur $\mathbb{R}^+$ par $F_n(x) = 2x^3 - x^2 + 2(n+1)x - 1$

1) Montrer que $(\exists! a_n \in]0,1[)\quad F_n(a_n) = 0$

2) Etudier le signe de $F_{n+1}(x) - F_n(x)$

3) étudier la monotonie de $(a_n)_n$

4) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\quad a_n \leq \dfrac{1}{n+1}$