Suites numériques

Exercice (1)

On considère la suite $(U_n)_{n\geq 1}$ définie par : $U_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^2}$

a) Montrer que $(\forall k \geq 2) \quad \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)}$

b) déduire que $(U_n)_{n\geq 1}$ est majorée

Exercice (2)

Soit $(U_n)_{n\geq 1}$ la suite telle que : $U_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{n+k}$

1) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad U_n \geq \frac{1}{2}$

2) étudier la monotonie de la suite $(U_n)_{n\geq 1}$

3) montrer que $(U_n)_{n\geq 1}$ est convergente

Exercice (3)

On considère la suite $(x_n)_n$ définie par : $x_0 = 1$ et $x_{n+1} = \sqrt[3]{1+\frac{1}{2}x_n^3}$

1) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 0 < x_n < 2$

2) montrer que $(x_n)_n$ est croissante puis qu'elle est convergente

3) on pose $U_n = x_n^3 - 2$ pour tout entier naturel n

montrer que $(U_n)_n$ est géométrique et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$

EXERCICE (5)

$I]$ on considère la fonction h définie sur $]-\infty,0[$ par : $h(x)=2\arctan\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{x-1}{x^2+1}$

1) calculer $h'(x)$ et montrer que h set strictement décroissante

2) déduire que $(\forall x<0)\ h(x)<0$

3) montrer que $(\forall x<0)\ x<\arctan x<\frac{x}{1+x^2}$

$II]$ soit f la fonction définie sur $]-\infty,0]$ par : $\begin{cases} f(x)=(x-1)^2\arctan\left(\frac{1}{x}\right) & ; \quad x\neq 0 \\ f(0)=-\frac{\pi}{2} \end{cases}$

ETUDE DE FONCTIONS

1) a) montrer que f est continue à gauche de 0

b) étudier la dérivabilité de f à gauche du point 0

2) a) calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et montrer que $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$

b) étudier la branche infinie de la courbe (C_f) au voisinage de $-\infty$

3) montrer que $(\forall x < 0)$ $f'(x) = (x-1)h(x)$ puis dresser le tableau de variation de f

4) tracer la courbe (C_f)

(on donne (C_f) coupe la droite $(\Delta) y = x - 2$ en un point d'abscisse $\alpha \simeq -0,5$

Et (C_f) est situer au dessous de (Δ) dans $]-\infty;\alpha[$)

○ Exercice 01 : (03pts)

⇨ *On considère les suites* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définies par :*

$$a_n = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{1+k^2}\right) - \arctan(n+1) \text{ et } b_n = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{1+k^2}\right) - \arctan(n).$$

1)- Soit $k \in \mathbb{N}$ *. En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que :*

1 $$\arctan(k+1) - \arctan(k) < \frac{1}{1+k^2} < \arctan(k) - \arctan(k-1).$$

2 *2)- Montrer que les suites* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sont adjacentes.*

فرض رقم 2

التمرين الأول :

لتكن $(U_n)_n$ متتالية معرفة بما يلي :

$$U_n = \sum_{p=0}^{p=2n+1} \frac{n}{n^2+p}$$ لكل عدد طبيعي غير منعدم n

1) بين أن $2 - \frac{2}{n+1} \le U_n \le 2 + \frac{2}{n}$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$

2) أ- تحقق أن $\sqrt{n} - \sqrt{n-1} \ge \frac{1}{2n}$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$

ب- استنتج أن $\sum_{p=1}^{p=n} \frac{1}{p} \le 2\sqrt{n}$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$

3) نضع $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} U_k$ لكل عدد طبيعي غير منعدم n

بين أن $2n - 4\sqrt{n+1} \le S_n \le 2n + 4\sqrt{n}$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$

و حدد $\lim_{n \to +\infty} \frac{S_n}{n}$

التمرين الثاني :

لتكن $(U_n)_n$ متتالية هندسية حدودها غير منعدمة أساسها q .

لكل عدد طبيعي n نضع : $S = U_0 + U_1 + ... + U_{n-1}$

و $P = U_0 U_1 ...... U_{n-1}$ و $T = \frac{1}{U_0} + \frac{1}{U_1} + ... + \frac{1}{U_{n-1}}$

1) بين أن $\frac{S}{T} = U_0^2 \ q^{n-1}$

2) استنتج أن $P^2 = \left(\frac{S}{T}\right)^n$

التمرين الثالث :

نعتبر المتتاليتين $(U_n)_n$ و $(V_n)_n$ المعرفتين بما يلي : $U_n = \sum_{k=0}^{k=2n+1} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ و $V_n = \sum_{k=0}^{k=2n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$

1) بين أن $(U_n)_n$ و $(V_n)_n$ متحاذيتين

2) نضع $f_n(x) = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}$

أ- بين أن $f_n'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{1+x^2}$

ب- أثبت أن $f_{2n}(x) \le \arctan x \le f_{2n+1}(x)$ $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$

ج- استنتج نهاية كل من المتتاليتين $(U_n)_n$ و $(V_n)_n$

EXERCICE (4)

on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \arctan\sqrt{x+2} & ; \quad x \geq -2 \\ f(x) = x + 2 - \sqrt{x^2 + 2x} & ; \quad x < -2 \end{cases}$

1) a) montrer que f est continue au point -2

b) étudier la dérivabilité de f à gauche et à droite du point -2

2) a) calculer la limite $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

b) étudier les branches infinies de la courbe (C_f)

3) a) calculer $f'(x)$ sur chacun des intervalles $]-\infty, -2[$ et $]-2, +\infty[$

b) étudier les variations de f et dresser sa table de variation

4) a) montrer que $(\forall x \in]-\infty, -2[)\ f(x) \geq 2x + 3$

b) tracer la courbe (C_f)

5) soit g la restriction de la fonction f sur $]-\infty, -2[$

a) Montrer que g est une bijection de $]-\infty, -2[$ vers un intervalle J à déterminer

b) calculer $g^{-1}(x)$ pour tout x de J

c) tracer dans le repère précédant la courbe de la fonction réciproque g^{-1}

6) soit $(U_n)_n$ la suite définie par : $U_0 = 2$ et $U_{n+1} = f(U_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$

a) montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une seule solution α dans $[1, 2]$

b) montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$ $\arctan x \leq x$

c) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$ $1 < U_n \leq 2$

d) étudier la monotonie de la suite $(U_n)_n$ puis déduire qu'elle est convergente et déterminer sa limite

5 Les branches infinies

Les branches infinies

- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$
  - $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = a \neq 0$
    - $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - ax) = b$
      - la droite $y = ax + b$ est une asymptote oblique
    - $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - ax) = \infty$
      - (C_f) admet une branche parabolique suivant $(D) : y = ax$
  - $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$
    - (C_f) admet une branche parabolique suivant (OX)
  - $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$
    - (C_f) admet une branche parabolique suivant (OY)
- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \beta$
  - la droite $x = \beta$ est une asymptote horizontale
- $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \infty$
  - la droite $x = \alpha$ est une asymptote verticale

La droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $\pm\infty$ $\iff \lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$

Attention ⚠

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - ax) = \pm\infty \not\Rightarrow$ (C_f) admet une branche parabolique suivant La droite d'équation $y = ax$ au voisinage de $\pm\infty$