

Exercice 2

1) a) en utilisant le théorème des accroissement finis montrer que

$$(\forall x \geq 0) \quad \frac{x}{1+x^2} \leq \arctan x \leq x$$

b) déduire la limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x^3}$

2) utiliser le théorème des accroissement finis et montrer que

$$(\forall x > 1) \quad \arctan(x+1) - \arctan x \leq \frac{1}{1+x^2} \leq \arctan x - \arctan(x-1)$$

3) a) utiliser le théorème des accroissement finis et montrer que

$$(\forall x \geq 0) \quad \sin x \leq x$$

b) démontrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad \cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$

4) en utilisant le théorème des accroissement finis calculer la limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^{x-1}} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$$

EXERCICE (5)

On pose $S_n = \sum_{p=1}^{p=n} \frac{1}{\sqrt{p}}$ et soit la suite $(U_n)_n$ définie par : $U_n = \frac{S_n}{\sqrt{n}}$

1) montrer que $(\forall p \in \mathbb{N}^*) \quad 2(\sqrt{p+1} - \sqrt{p}) \leq \frac{1}{\sqrt{p}}$

2) déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad S_n \geq 2\sqrt{n+1} - 2$ et déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

3) monter par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad S_n \leq \sqrt{n} + \sqrt{n-1}$

Puis déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

EXERCICE (6)

Déterminer dans chacun des cas suivants la limite de la suite $(U_n)_n$

1) $U_n = 5 \times 3^{n+1} - 2 \times 5^n$; 2) $U_n = 2^n \sin\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)$, $x \in \mathbb{R}^*$

3) $U_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{k=n} k$; $U_n = \sum_{k=2}^{k=n} \frac{2}{k^2 - 1}$; 4) $U_{n+1} \geq 2U_n$ et $U_0 \in \mathbb{R}^{*+}$

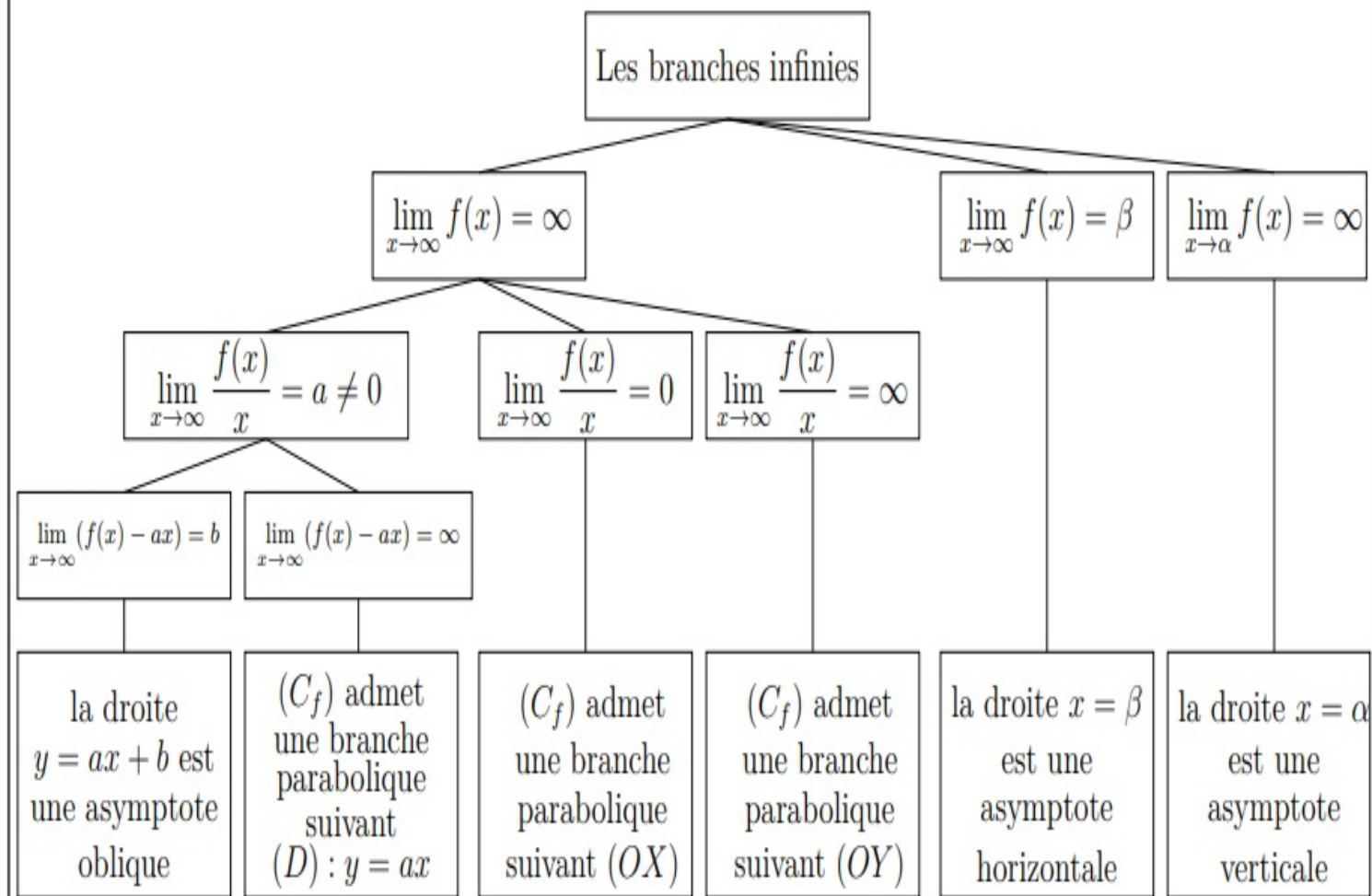
5) $U_n = \sum_{p=1}^{p=n} \frac{1}{4p^2 - 1}$; 6) $U_n = \sin^2(\pi\sqrt{n^2 + n})$

7) $U_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} E(kx)$ et $x \in \mathbb{R}^*$; 8) $U_n = \frac{2^n}{n^3}$; 9) $U_n = \frac{\sqrt{n}}{2^n}$

10) $U_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{(-1)^{k+1}}{3^k}$; 11) $U_n = \sum_{k=1}^{k=n^2} \frac{1}{1 + \sqrt{kn}}$

12) $U_n = \sum_{p=1}^{p=n} \frac{1}{\sqrt{p+1} + \sqrt{p}}$

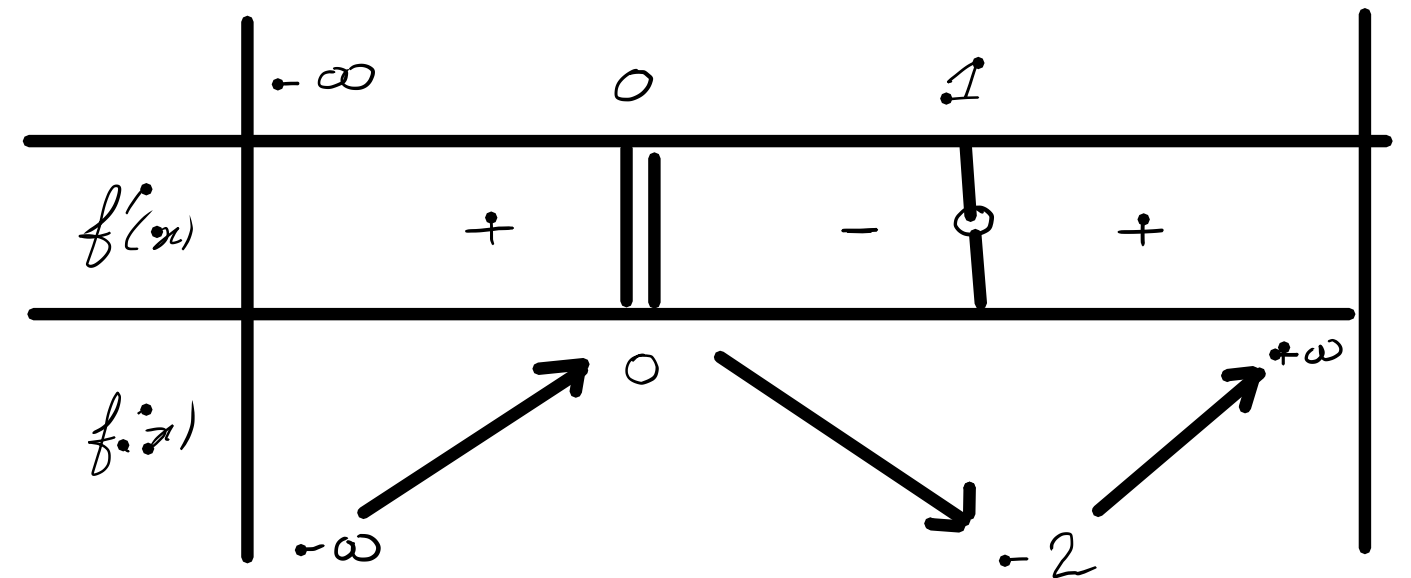
5 Les branches infinies



La droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $\pm\infty \iff \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$

Attention Δ

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - ax) = \pm\infty \nRightarrow (C_f)$ admet une branche parabolique suivant La droite d'équation $y = ax$ au voisinage de $\pm\infty$



$\rightarrow \lim_{0^+ x} \frac{f(x)}{x} = 0$ et $\lim_{0^- x} \frac{f(x)}{x} = +\infty$
 $\rightarrow \lim_{-\infty x} \frac{f(x)}{x} = 0$ et $\lim_{+\infty} f(x) - x = 0$
 $\rightarrow f(\alpha) = 0, 3 < \alpha < 4$
 Traçer (C_f)

EXERCICE (1)

On pose $(\forall n \geq 1) \quad U_n = \frac{1}{2\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{k}}$

- 1) montrer que $(\forall k \geq 1) \quad \frac{1}{2\sqrt{k+1}} \leq \sqrt{k+1} - \sqrt{k} \leq \frac{1}{2\sqrt{k}}$
- 2) a) déduire un encadrement du terme U_n de la suite $(U_n)_{n \geq 1}$
 b) déterminer la limite de $(U_n)_{n \geq 1}$

EXERCICE (2)

On pose $u_n = \sqrt[n]{n} - 1$ pour tout entier n tel que $n \geq 2$

- 1) montrer que $(\forall n \geq 2) \quad u_n \geq 0$
- 2) montrer que $(\forall n \geq 2) \quad n \geq C_n^2 (u_n)^2$ en déduire $(\forall n \geq 2) \quad u_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}}$
- 3) montrer que $(u_n)_n$ est convergente et déterminer sa limite

EXERCICE (3)

Soit n un entier de \mathbb{N}^* . on considère la fonction f_n définie sur $]0,1[$

$$\text{par : } f_n(x) = \tan\left(\frac{\pi}{2}x\right) - \frac{\pi}{2nx}$$

- 1) montrer que $f_n(x) = 0$ admet une unique solution notée α_n
- 2) montrer que $(\alpha_n)_n$ est décroissante et qu'elle est convergente
- 3) montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 0$
- 4) déterminer la limite de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n \sqrt{n}$

EXERCICE (4)

Dans chacun des deux cas montrer que $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes

- 1) $u_n = \left(\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{k}} \right) - 2\sqrt{n+1} \quad ; \quad v_n = \left(\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{k}} \right) - 2\sqrt{n}$
- 2) $u_n = \prod_{k=1}^{k=n} \cos\left(\frac{\pi}{2^k}\right) \quad ; \quad v_n = u_n \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$

EXERCICE (4)

on considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$\begin{cases} f(x) = \arctan \sqrt{x+2} & ; \quad x \geq -2 \\ f(x) = x+2 - \sqrt{x^2+2x} & ; \quad x < -2 \end{cases}$$

- 1) a) montrer que f est continue au point -2
b) étudier la dérivabilité de f à gauche et à droite du point -2
- 2) a) calculer la limite $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
b) étudier les branches infinies de la courbe (C_f)
- 3) a) calculer $f'(x)$ sur chacun des intervalles $] -\infty, -2[$ et $] -2, +\infty[$
b) étudier les variations de f et dresser sa table de variation
- 4) a) montrer que $(\forall x \in] -\infty, -2[) f(x) \geq 2x + 3$
b) tracer la courbe (C_f)
- 5) soit g la restriction de la fonction f sur $] -\infty, -2[$
 - a) Montrer que g est une bijection de $] -\infty, -2[$ vers un intervalle J à déterminer
 - b) calculer $g^{-1}(x)$ pour tout x de J
 - c) tracer dans le repère précédant la courbe de la fonction réciproque g^{-1}
- 6) soit $(U_n)_n$ la suite définie par : $U_0 = 2$ et $U_{n+1} = f(U_n)$ pour tout n de \mathbb{N}
 - a) montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une seule solution α dans $[1, 2]$
 - b) montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}^+) \arctan x \leq x$
 - c) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) 1 < U_n \leq 2$
 - d) étudier la monotonie de la suite $(U_n)_n$ puis déduire qu'elle est convergente et déterminer sa limite

بيء أه $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad 2n - 4\sqrt{n+1} \leq S_n \leq 2n + 4\sqrt{n}$

و حد $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n}$

التمرية الثاني :

للك $(U_n)_n$ متتالية هندسية حدودها غير منعدمة أساسها q .

لك عدد طبيعي n نضع : $S = U_0 + U_1 + \dots + U_{n-1}$

$T = \frac{1}{U_0} + \frac{1}{U_1} + \dots + \frac{1}{U_{n-1}}$ و $P = U_0 U_1 \dots U_{n-1}$

(1) بيء أه $\frac{S}{T} = U_0^2 q^{n-1}$

(2) استنتج أه $P^2 = \left(\frac{S}{T}\right)^n$

فرض رقم 2

التمرية الأول :

للك $(U_n)_n$ متتابة معرفة بما يلي :

لك عدد طبيعي غير منعدم n $U_n = \sum_{p=0}^{p=2n+1} \frac{n}{n^2 + p}$

(1) بيء أه $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad 2 - \frac{2}{n+1} \leq U_n \leq 2 + \frac{2}{n}$

(2) أ- تحقق أه $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \sqrt{n} - \sqrt{n-1} \geq \frac{1}{2n}$

ب- استنتج أه $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \sum_{p=1}^{p=n} \frac{1}{p} \leq 2\sqrt{n}$

(3) نضع $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} U_k$ لك عدد طبيعي غير منعدم n

التمرية الثالث :

نعتبر المتتاليتين $(U_n)_n$ و $(V_n)_n$ المعرفتين بما يلي : $U_n = \sum_{k=0}^{k=2n+1} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ و $V_n = \sum_{k=0}^{k=2n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$

(1) بيء أه $(U_n)_n$ و $(V_n)_n$ متحاذيتين

(2) نضع $f_n(x) = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}$

أ- بيء أه $f'_n(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{1+x^2}$

ب- أثبت أه $(\forall x \in \mathbb{R}^+) \quad f_{2n+1}(x) \leq \arctan x \leq f_n(x)$

ج- استنتج نهاية كل من المتتاليتين $(U_n)_n$ و $(V_n)_n$