Exercices et problèmes

Exercice 1 :

Soit f la fonction définie sur IR par :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^3-8}{x-2} & si\ x\in]-\infty,2[\\ f(x)=\sqrt{x+2}+10 & si\ x\in[2,+\infty[\end{cases}$$

1) Calculer $f(2)$ *et* $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$
2) Est-ce que la fonction f est continue en **2** ?
3) Etudier la continuité de f sur IR.
4) Etudier la dérivabilité de f en **2**, et interpréter géométriquement les résultats.

Exercice 2 :

Soit f la fonction définie par : $f(x)=x^3+3x-2$

1) Montrer que l'équation $f(x)=0$ a une seule solution α sur $[0;+\infty[$ et que $\alpha\in]0;1[$.
2) Donner un encadrement d'amplitude $0,125$ de α.
3) En déduire que :

$$(\forall x\in[0;\alpha]); f(x)\le 0 \quad et \quad (\forall x\in[\alpha;+\infty[); f(x)\ge 0$$

4) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera, puis calculer $f(0)$; $f^{-1}(-2)$ *et* $(f^{-1})'(-2)$.

Exercice3 :

Soit f la fonction définie sur IR par :

$$\begin{cases} f(x)=3-3x-x^3 & si\ x\in]-\infty,1[\\ f(x)=\sqrt{x^2-1}-1 & si\ x\in[1,+\infty[\end{cases}$$

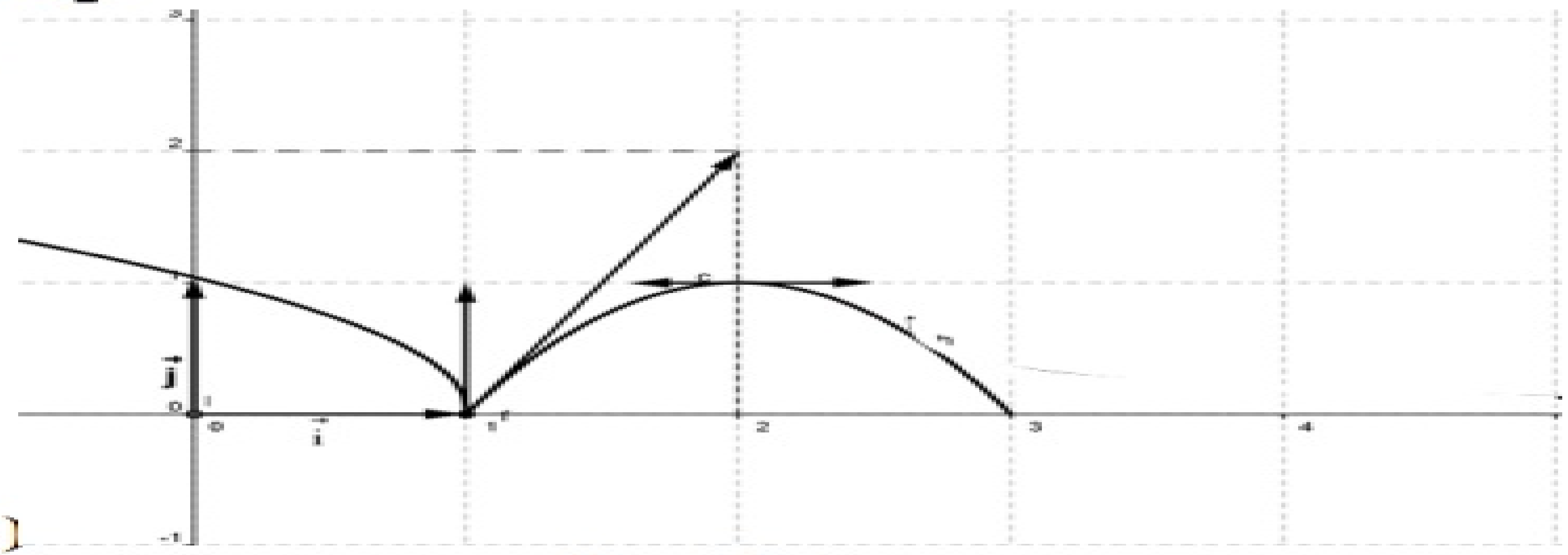
et (C_f) sa courbe dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) Etudier la continuité de f à droite et à gauche en **1**.
2) **a)** Etudier la dérivabilité de f à droite et à gauche en **1.** Puis Interpréter graphiquement les résultats.
3) calculer $f'(x)$ pour $x\in]-\infty,1[$.
4) Montrer que le point $I(0;3)$ est un point d'inflexion de (C_f).
5) Donner le tableau de variation de f sur **IR**.
6) Etudier les branches infinies de (C_f).
7) Ecrire une équation de la tangente à (C_f) au point I
8) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α *dans* $]-\infty,1[$ et que $\alpha\in]0;1[$.
9) Tracer la courbe (C_f) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.
10) Soit g la restriction de f sur l'intervalle $]-\infty,1[$, montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera, puis tracer sa courbe dans le repère précédant.

Exercice 9 :

La courbe si dessous et celle d'une fonction f définie sur $]-\infty;3]$.

f



(C_f)

1) Déterminer $f'(2)$, (justifier) $(O;\vec{i};\vec{j})$

2) Donner $f_d'(1)$, justifier.

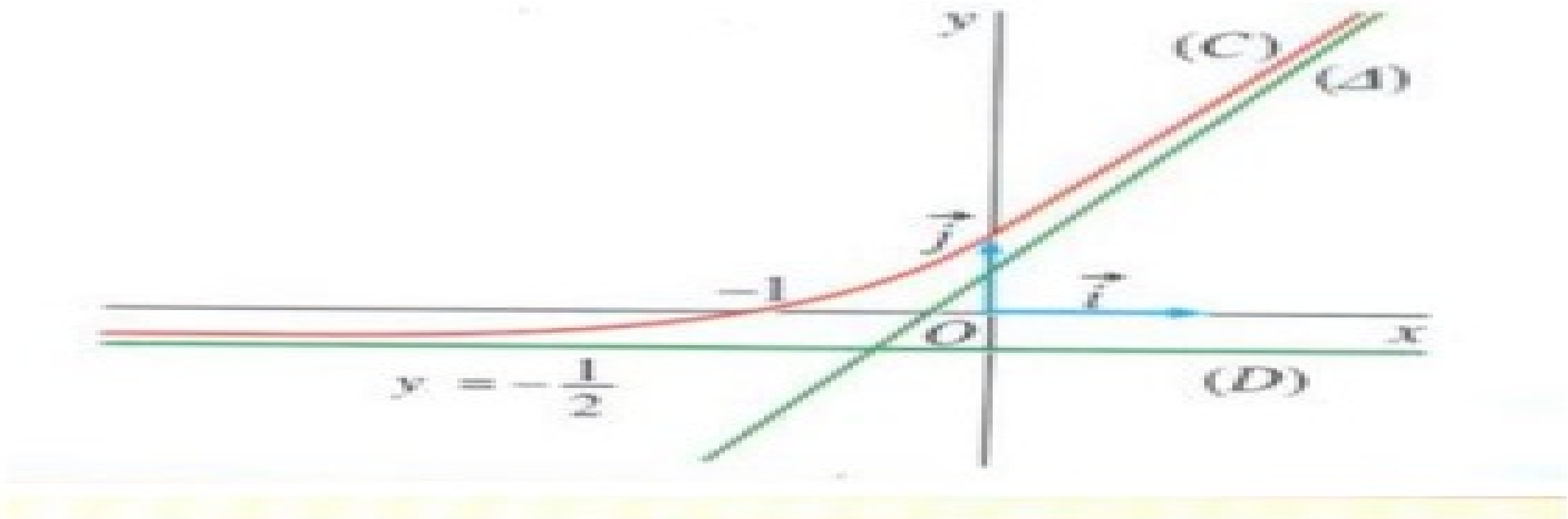
3) est –elle dérivable à gauche en 1, justifier ?

4) Déterminer $\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{f(x)}{x-1}$. f (C_f)

5) Dresser le tableau de variation de sur $]-\infty;3]$.

Exercice 11 :

(C) désigne la courbe représentative d'une fonction dans un repère orthonormé.



- La droite $(D) : y = -\frac{1}{2}$ est une asymptote (C_f) horizontale à la courbe (C) au voisinage de $-\infty$.
- La droite $(\Delta) : y = 2x + \frac{1}{2}$ est une asymptote $(O; \vec{i}; \vec{j})$ oblique à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.

Par une lecture graphique.

1) Déterminer le signe de $f(x)$.

2) Déterminer le sens de variations de .

3) Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

Et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (2x + \frac{1}{2})$.

Exercice10 :

Soit la fonction : $f : x \mapsto \dfrac{x(x^2+1)}{x^2-1}$

et sa représentation graphique dans un repère orthonormé du plan .

1) Déterminer D_f, puis étudier la continuité et la dérivabilité de sur D_f. Justifier les réponses !
2) Etudier la parité de f et en déduire un élément de symétrie de .
3) Etudier les limites de f aux bornes du domaine D_f et en déduire les asymptotes éventuelles à .

---

4) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations.
5) Etudier la concavité de et résumer cette étude dans un tableau.
6) Déterminer une équation cartésienne de la tangente (T) à au point d'abscisse **0**.
7) Etudier la position de par rapport à (T).
8) Tracer et (T) dans le repère .

4) Etudier les variations de $\boldsymbol{f}$ et dresser son tableau de variations.

5) Etudier la concavité de et résumer cette étude dans un tableau.

6) Déterminer une équation cartésienne de la tangente (T) à au point d'abscisse $\mathbf{0}$.

7) Etudier la position de par rapport à (T).

8) Tracer et (T) dans le repère .