Exercice (1)

Soit f *une application définie sur* $\mathbb{R}$ *par* : $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+x+1}$

☺ *résoudre dans* $\mathbb{R}$ *l'équation* $f(x)=\dfrac{1}{3}$.

f *est-elle injective ?*

☺ *montrer que* $(\forall x\in\mathbb{R})\ f(x)\geq 0$. f *est-elle surjective ?*

☺ *soit* g *la restriction de* f *sur* $\mathbb{R}^+$. *Montrer que* g *est bijective de* $\mathbb{R}^+$ *vers* $[0,1[$ *puis définir sa réciproque* g^{-1}

Exercice (2)

Soit f l'application définie de $\mathbb{R}^+$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-3}{2\sqrt{x}+2}$

1) on pose $A=\left\{1,\dfrac{1}{2}\right\}$ déterminer $f^{-1}(A)$. f est-elle surjective ?

2) prouver que $f(\mathbb{R}^+)=\left[-\dfrac{3}{2},\dfrac{1}{2}\right[$

3) soit g l'application définie de $\mathbb{R}^+$ vers $\left[-\dfrac{3}{2},\dfrac{1}{2}\right[$ par : $g(x)=f(x)$

a) montrer que g est injective

b) déduire que g réalise un bijection $\mathbb{R}^+$ vers $\left[-\dfrac{3}{2},\dfrac{1}{2}\right[$ et définir g^{-1}

exercice (3)

on considère l'application f telle que : $f(x)=\dfrac{x(1-x)^2}{(1+x^2)^2}$

1) vérifier que $(\forall x\in\mathbb{R}^*)\ f\left(\dfrac{1}{x}\right)=f(x)$ que peut-on déduire ?

2) montrer que $(\forall x\in\mathbb{R})\ f(x)\leq\dfrac{1}{4}$. f est-elle surjective de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$

Exercice (4)

Soit l'application $f: \begin{array}{l} \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z} \\ (x,y) \to 2x+y \end{array}$

1) *montrer que* f *est surjective non injective*

2) *on pose* $A=\{-1,2\}$ *déterminer* $f(A\times A)$

3) *déterminer* $f^{-1}(\{0\})$

Exercice (5)

Soit f une application de E vers F . A et B deux parties de F

1) prouver que $A \subseteq B \Rightarrow f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(B)$

2) Montrer que $f^{-1}(A\cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$

3) montrer que $f^{-1}(A\cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$

Exercice (6)

On pose $I = \left]0,+\infty\right[$. *on considère l'application* f *définie de* $I\times I$ *vers* $I\times I$ *par :* $f((x,y)) = \left(xy, \frac{x}{y}\right)$

1) *prouver que* f *est injective*

2) *montrer que* f *est bijective puis définir sa réciproque*

Exercice (7)

E un ensemble non vide A une partie de E et soit f l'application définie de $P(E)$ vers $P(A)$ par : $f(X) = X\cap A$

☺ déterminer $\Gamma = \{X \in P(E) / \ f(X) = X\}$ et prouver que f est surjective

☺ déterminer $f(\overline{A})$ puis montrer que f n'est par injective

EXERCICE (1)

Déterminer en extension les ensembles ci-dessous :

1) $A = \left\{ x \in \mathbb{Z} \;/\; \dfrac{2|x|-1}{3} \le 1 \right\}$ 2) $E = \left\{ \dfrac{x}{x+1} > 1 \;/\; x \in \mathbb{R} \right\}$

3) $C = \left\{ x \in \mathbb{Z} \;/\; \dfrac{x+6}{x+3} \in \mathbb{Z} \right\}$ 6) $F = \left\{ (x,y) \in \mathbb{Z}^2 \;/\; x^2 - y^2 = 4 \right\}$

4) $D = \left\{ x \in \left]-\pi, \pi\right[\;/\; x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{3} \;;\; k \in \mathbb{Z} \right\}$

5) $E = \left\{ (x,y) \in \mathbb{Z}^2 \;/\; xy - 7x - 5y + 9 = 0 \right\}$

7) $G = \left\{ (-1)^n - (-1)^m \;/\; n \in \mathbb{N} \;,\; m \in \mathbb{N} \right\}$

EXERCICE (2)

On pose $A = \left\{ \dfrac{3x+2}{2x+2} / \; x \in \mathbb{R} \right\}$ Et $B = \left\{ \dfrac{3x+4}{2x+2} / \; x \in \mathbb{R} \right\}$ montrer que $A = B$	On pose $A = \left\{ \dfrac{x}{x+1} / \; x \in \mathbb{R}^+ \right\}$ Montrer que $A = \left[0, 1\right[$
On pose $A = \left\{ 6k'+1 \;/\; k' \in \mathbb{Z} \right\}$ Et $B = \left\{ 3k-2 \;/\; k \in \mathbb{Z} \right\}$ Montrer que $A \subseteq B$	On pose $F = \left\{ \pi + \dfrac{2k\pi}{3} / \; k \in \mathbb{Z} \right\}$ Et $E = \left\{ (2k'+1)\pi \;/\; k' \in \mathbb{Z} \right\}$ Montrer que $E \subseteq F$ a-t-on $F \subseteq E$

EXERCICE (3)

On considère les ensembles $E = \left\{ \dfrac{3k+4}{12} \;/\; k \in \mathbb{Z} \right\}$ et $F = \left\{ \dfrac{6k+1}{12} \;/\; k \in \mathbb{Z} \right\}$

a) vérifiez que $\dfrac{1}{3} \in E$ et $\dfrac{1}{3} \notin F$

b) montrer que $F \subseteq E$ a-t-on $E = F$?

EXERCICE (4)

On pose $E = \left\{a + b\sqrt{2} \ / \ (a,b) \in \mathbb{Z}^2\right\}$

1) montrer que $E \neq \varnothing$

2) soit u un élément de E montrer que $u^2 \in E$

3) montrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}) \ \ u^n \in E$

EXERCICE (5)

Soient a et b deux réels de $\mathbb{R}$. on pose $E = \left\{n \in \mathbb{Z} \ / \ E(na) = E(nb)\right\}$

1) supposons que $a < b$ et on pose $\alpha = \dfrac{1}{b-a}$ montrer que $E \subseteq \left]-\alpha, \alpha\right[$

2) en déduire que si $E = \mathbb{Z}$ alors $a = b$

EXERCICE (6)

On considère les ensembles :

$A = \{1,4\}$; $B = \{1,2,a,b\}$ et $E = \{1,2,3,4,a,b,c\}$

1) déterminer X de $P(E)$ tel que $A \cap X = A$

2) déterminer Y de $P(E)$ tel que $A \cup Y = A$

EXERCICE (7)

on pose $A = \left\{x = \sqrt{n^2+1} - n \ / \ n \in \mathbb{N}\right\}$

1) montrer que $A \subset \left]0,1\right]$

2) résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation $\sqrt{n^2+1} - n = \dfrac{1}{2}$ a-t-on $A = \left]0,1\right]$?

EXERCICE (8)

E un ensemble non vide, A ; B *et* C trois parties de E montrer que :

- ☞ $(A \cap B) - C = (A - C) \cap (B - C)$
- ✍ $(A \cap B = A) \Leftrightarrow (A \subset B)$
- ✍ $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$
- ☞ $(A \cup B = B) \Leftrightarrow (A \subset B)$
- ☞ $(A \cup B = B \cap C) \Leftrightarrow (A \subset B \subset C)$
- ✍ $(A \cap \overline{B} = \varnothing) \Leftrightarrow (A \subset B)$

Exercice (5)

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{-2x}{x+1}$

1) donner le tableau de variation de f et tracer (C_f)

2) on considère la fonction $g(x) = (f \circ f)(x)$

a) détermine D_g et exprimer $g(x)$ en fonction de x

c) étudier le sens de variation de g sur $]-\infty, -1[$

Exercice (6)

On considère les deux fonctions f et g définies par :

$$f(x) = \frac{2(x^2+1)}{(x+1)^2} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{x-1}{x+1}$$

1) montrer que f admet un minimum en $a = 1$

2) a) vérifier que $f(x) = 1 + (g(x))^2$

b) étudier les variations de f sur $]-1, 1]$; $[1, \infty[$

Exercice (7)

on considère la fonction f définie par :

$$f(x) = x + 4 - 2\sqrt{x+2}$$

1) déterminer D_f et montrer que f est minorée par 1

2) résoudre l'équation $f(x) = 1$

3) on pose $g(x) = \sqrt{x+2}$

a) déterminer une fonction usuelle h telle que :
$f = h \circ g$

b) étudier la monotonie de f sur $[-2, -1]$

Exercice (8)

soit m un réel strictement positif . on définie la fonction f_m sur $\mathbb{R}^{+*}$ par : $f_m(x) = x + \frac{m}{x}$

1) la fonction f_m set-elle impaire ?

2) a) montrer que $T_{f_m}(x, y) = 1 - \frac{m}{xy}$

b) étudier les variations de f_m sur
$]\sqrt{m}, +\infty[$; $]0, \sqrt{m}[$

c) déduire que f admet un extrêmum à préciser

3) soient c , b , a trois réels de $\mathbb{R}^{+*}$

Montrer que $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a + b + c$