Suites numériques

Exercice (1)

On considère la suite $(U_n)_{n\geq 1}$ définie par : $U_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^2}$

a) Montrer que $(\forall k \geq 2)$ $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)}$

b) déduire que $(U_n)_{n\geq 1}$ est majorée

Exercice (2)

Soit $(U_n)_{n\geq 1}$ la suite telle que : $U_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{n+k}$

1) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $U_n \geq \frac{1}{2}$

2) étudier la monotonie de la suite $(U_n)_{n\geq 1}$

3) montrer que $(U_n)_{n\geq 1}$ est convergente

Exercice (3)

On considère la suite $(x_n)_n$ définie par : $x_0 = 1$ et $x_{+1} = \sqrt[3]{1+\frac{1}{2}x_n^3}$

1) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$ $0 < x_n < 2$

2) montrer que $(x_n)_n$ est croissante puis qu'elle est convergente

3) on pose $U_n = x_n^3 - 2$ pour tout entier naturel n

montrer que $(U_n)_n$ est géométrique et calculer $\lim_{n\to+\infty} x_n$

EXERCICE (5)

I] on considère la fonction h définie sur $]-\infty,0[$ par : $h(x)=2\arctan\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{x-1}{x^2+1}$

1) calculer $h'(x)$ et montrer que h set strictement décroissante

2) déduire que $(\forall x<0)\ \ h(x)<0$

3) montrer que $(\forall x<0)\ \ x<\arctan x<\frac{x}{1+x^2}$

II] soit f la fonction définie sur $]-\infty,0]$ par : $\begin{cases} f(x)=(x-1)^2\arctan\left(\frac{1}{x}\right) & ; \quad x\neq 0 \\ f(0)=-\frac{\pi}{2} \end{cases}$

1) on a : la fonction $x \longrightarrow 1/x$ est derivable sur $\mathbb{R}^*$

d'ou sa restriction sur $]-\infty,0[$ est derivable

d'ou $x \longrightarrow \arctan(1/x)$ derivable sur $]-\infty,0[$

et la fonc de $x \rightarrow \frac{x-1}{x^2+1}$ est derivable sur $\mathbb{R}$

donc sa restriction A derivable sur $]-\infty,0[$

d'ou h est derivable sur $]-\infty,0[$

$(\arctan u)' = \frac{u'}{1+u^2}$

$\forall x \in]-\infty,0[$

$$h'(x) = 2\frac{(1/x)'}{1+1/x^2} - \frac{(x^2+1)-2x(x-1)}{(x^2+1)^2}$$

$$= 2\frac{-1/x^2}{1+1/x^2} - \frac{-x^2+1+2x}{(x^2+1)^2}$$

$$= -\frac{2}{1+x^2} + \frac{x^2-1-2x}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{-2(1+x^2)+x^2-2x-1}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{-x^2-2x-3}{(x^2+1)^2} = -\frac{\overbrace{x^2+2x+3}^{\Delta<0}}{(x^2+1)^2}<0$$

d'ou f est strictement decroissante

EXERCICE (5)

$I]$ on considère la fonction h définie sur $]-\infty,0[$ par : $h(x)=2\arctan\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{x-1}{x^2+1}$

1) calculer $h'(x)$ et montrer que h set strictement décroissante

2) déduire que $(\forall x<0)\ \ h(x)<0$

3) montrer que $(\forall x<0)\ \ x<\arctan x<\frac{x}{1+x^2}$

$II]$ soit f la fonction définie sur $]-\infty,0]$ par : $\begin{cases} f(x)=(x-1)^2\arctan\left(\frac{1}{x}\right) & ; \quad x\neq 0 \\ f(0)=-\frac{\pi}{2} \end{cases}$

2) Soit $x<0$ on a h est décroissante sur $]-\infty,0[$

$$h(]-\infty,0[) =]\lim_{0^-} h(x), \lim_{-\infty} h(x)[$$

$$=]-\pi+1, 0[$$

$$\lim_{0^-} h(x) = \lim_{0^-} 2\arctan \tfrac{1}{x} - \frac{x-1}{x^2+1}$$

$$= -\pi + 1$$

$$\lim_{-\infty} h(x) = 0$$

$\forall x \in]-\infty,0[$: $h(x) \in]-\pi+1,0[\subset]-\infty,0[$

d'où $h(x)<0$

3) $(\forall x<0)$; $x < \arctan x < \frac{x}{1+x^2}$

$[x,0] \longrightarrow$ L'intervalle

Fonction Arctan.

Soit $x<0$ (x fixe)

on pose $f(t) = \arctan t$

$\rightarrow$ on a f est continue sur $\mathbb{R}$
d'où f est continue sur $[x,0]$

$\rightarrow$ f dérivable sur $\mathbb{R}$
d'où f est dérivable sur $]x,0[$

EXERCICE (5)

I] on considère la fonction h définie sur $]-\infty,0[$ par : $h(x)=2\arctan\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{x-1}{x^2+1}$

1) calculer $h'(x)$ et montrer que h set strictement décroissante

2) déduire que $(\forall x<0)\ \ h(x)<0$

3) montrer que $(\forall x<0)\ \ x<\arctan x<\frac{x}{1+x^2}$

II] soit f la fonction définie sur $]-\infty,0]$ par : $\begin{cases} f(x)=(x-1)^2\arctan\left(\frac{1}{x}\right) & ; \quad x\neq 0 \\ f(0)=-\frac{\pi}{2} \end{cases}$

$\forall t\in]x,0[\quad g'(t)=(\arctan t)'=\frac{(t)'}{1+t^2}$

$=\frac{1}{1+t^2}$

on a $x<t<0$

$\Rightarrow 0<t^2<x^2$

$1<t^2+1<x^2+1$

$\frac{1}{x^2+1}<\frac{1}{1+t^2}<1$

d'où $\boxed{\frac{1}{1+x^2}<g'(t)<1}$

Alors : d'après I.A.F

$\Rightarrow \frac{1}{1+x^2}<\frac{g(0)-g(x)}{0-x}<1$

$\Leftrightarrow \frac{1}{1+x^2}<\frac{\arctan x}{x}<1$

puisque $x<0$

$\Leftrightarrow \boxed{x<\arctan x<\frac{x}{1+x^2}}$

EXERCICE (5)

$I]$ on considère la fonction h définie sur $]-\infty,0[$ par : $h(x)=2\arctan\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{x-1}{x^2+1}$

1) calculer $h'(x)$ et montrer que h set strictement décroissante

2) déduire que $(\forall x<0)\quad h(x)<0$

3) montrer que $(\forall x<0)\quad x<\arctan x<\frac{x}{1+x^2}$

$II]$ soit f la fonction définie sur $]-\infty,0]$ par : $\begin{cases} f(x)=(x-1)^2\arctan\left(\frac{1}{x}\right) & ; \quad x\neq 0 \\ f(0)=-\frac{\pi}{2} \end{cases}$

$$\lim_{-\infty} f(x)-x$$

$$=\lim_{-\infty}(x-1)^2\arctan\frac{1}{x}-x$$

$$X=\frac{1}{x}$$

$$=\lim_{X\to 0^-}\left(\frac{1}{X}-1\right)^2\arctan X-\frac{1}{X}$$

$$=\lim_{0^-}\left(\frac{1-X}{X}\right)^2\cdot\arctan(X)-\frac{1}{X}$$

$$X<\arctan X<\frac{X}{1+X^2}$$

$$X\left(\frac{1-X}{X}\right)^2<\left(\frac{1-X}{X}\right)^2\cdot\arctan X<\left(\frac{X}{1+X^2}\right)\left(\frac{1-X}{X}\right)^2$$

ETUDE DE FONCTIONS

1) a) montrer que f est continue à gauche de 0

b) étudier la dérivabilité de f à gauche du point 0

2) a) calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}=1$

b) étudier la branche infinie de la courbe (C_f) au voisinage de $-\infty$

3) montrer que $(\forall x<0)\quad f'(x)=(x-1)h(x)$ puis dresser le tableau de variation de f

4) tracer la courbe (C_f)

(on donne (C_f) coupe la droite $(\Delta)\, y=x-2$ en un point d'abscisse $\alpha \simeq -0,5$

Et (C_f) est situer au dessous de (Δ) dans $]-\infty;\alpha[$)

EXERCICE (5)

$I]$ on considère la fonction h définie sur $]-\infty,0[$ par : $h(x)=2\arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{x-1}{x^2+1}$

1) calculer $h'(x)$ et montrer que h set strictement décroissante

2) déduire que $(\forall x<0)\quad h(x)<0$

3) montrer que $(\forall x<0)\quad x<\arctan x<\dfrac{x}{1+x^2}$

$II]$ soit f la fonction définie sur $]-\infty,0]$ par : $\begin{cases} f(x)=(x-1)^2\arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) & ; \quad x\neq 0 \\ f(0)=-\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

II) a) $\lim\limits_{0^-} f(x) = \lim\limits_{0^-} (x-1)^2 \arctan(1/x)$

$= 1\times(-\pi/2) = -\pi/2$ (car $\lim\limits_{0^-} 1/x = -\infty$, $\lim\limits_{-\infty} \arctan x = -\pi/2$

$= f(0)$

d'où f est continue à gauche de 0

b) Dérivabilité en 0^-

$\lim\limits_{0^-} \dfrac{f(x)+\pi/2}{x} = \lim\limits_{0^-} \dfrac{(x-1)^2\arctan(1/x)+\pi/2}{x}$

$(\forall x<0)\quad \arctan x + \arctan 1/x = -\pi/2$

$\Rightarrow \arctan 1/x = -\pi/2 - \arctan x$

$= \lim\limits_{0^-} \dfrac{(x-1)^2(-\pi/2-\arctan x)+\pi/2}{x}$

$= \lim \dfrac{(-(x-1)^2+1)\pi/2 - (x-1)^2\arctan x}{x}$

$= \lim\limits_{0^-} \dfrac{(-x^2+2x)}{x}\pi/2 - (x-1)^2 \dfrac{\text{Arctan}\, x}{x}$

$= \lim (-x+2)\pi/2 - (x-1)^2 \dfrac{\text{Arctan}\, x}{x}$

$= \pi - 1$

~~d~~ f est dérivable à gauche de 0

ETUDE DE FONCTIONS

1) a) montrer que f est continue à gauche de 0

b) étudier la dérivabilité de f à gauche du point 0

2) a) calculer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ et montrer que $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$

b) étudier la branche infinie de la courbe (C_f) au voisinage de $-\infty$

3) montrer que $(\forall x<0)\ \ f'(x) = (x-1)h(x)$ puis dresser le tableau de variation de f

4) tracer la courbe (C_f)

(on donne (C_f) coupe la droite $(\Delta)\, y = x-2$ en un point d'abscisse $\alpha \simeq -0{,}5$

Et (C_f) est situer au dessous de (Δ) dans $]-\infty;\alpha[$)

2) a) $\lim_{-\infty} f(x) = \lim_{-\infty} (x-1)^2 \cdot \arctan(1/x)$

$= \lim_{-\infty} (x-1)^2 \cdot \frac{\arctan 1/x}{1/x} \cdot 1/x$

$= \lim_{-\infty} \frac{(x-1)^2}{x} \cdot \frac{\arctan 1/x}{1/x} = -\infty$ car $\begin{cases} - \\ - \end{cases}$

$\lim_{-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{-\infty} \frac{(x-1)^2 \cdot \operatorname{Arctan} 1/x}{x}$

$= \lim \cancel{\frac{(x-1)^2}{x^2}} \cdot \cancel{\frac{\operatorname{Arctan}(1/x)}{1/x}}$

$= 1 = a$ car $\begin{cases} - \\ - \end{cases}$

$y = ax+b$

$y = x$

asymptote oblique

$x < \operatorname{Arctan} x < \frac{x}{1+x^2}$

b) on a : $\lim_{-\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$

Calculons $\lim_{-\infty} f(x) - x$

$\lim_{-\infty}(f(x)-x) = \lim_{-\infty} (x-1)^2 \cdot \arctan\left(\frac{1}{x}\right) - x$

$= \lim_{-\infty} x^2 \operatorname{Arctan} 1/x - 2x \arctan 1/x + \operatorname{Arctan} 1/x - x$

$= \lim_{-\infty} x \cdot \left(\cancel{\frac{\operatorname{Arctan} 1/x}{1/x}}\right) - \left(2\, \cancel{\frac{\arctan 1/x}{1/x}} + \cancel{\arctan 1/x} - x\right.$

$= \lim_{-\infty} x^2 \operatorname{Arctan} 1/x - x - 2$

$= \lim_{0} 1/X^2 \operatorname{Arctan} X - 1/X$ (encadrement)

ETUDE DE FONCTIONS

1) a) montrer que f est continue à gauche de 0

b) étudier la dérivabilité de f à gauche du point 0

2) a) calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$

b) étudier la branche infinie de la courbe (C_f) au voisinage de $-\infty$

3) montrer que $(\forall x<0)\ \ f'(x) = (x-1)h(x)$ puis dresser le tableau de variation de f

4) tracer la courbe (C_f)

(on donne (C_f) coupe la droite $(\Delta)\, y = x-2$ en un point d'abscisse $\alpha \simeq -0{,}5$

Et (C_f) est situer au dessous de (Δ) dans $]-\infty;\alpha[$)

3) $f(x) = (x-1)^2 \cdot \text{Arctan}(1/x)$

$f'(x) = \left((x-1)^2\right)' \cdot \text{Arctan}(1/x) + \left(\text{Arctan}\, 1/x\right)'(x-1)^2$

$= 2(x-1)'(x-1)\cdot \text{Arctan}\frac{1}{x} + (x-1)^2\left(\frac{-1}{1+x^2}\right)$

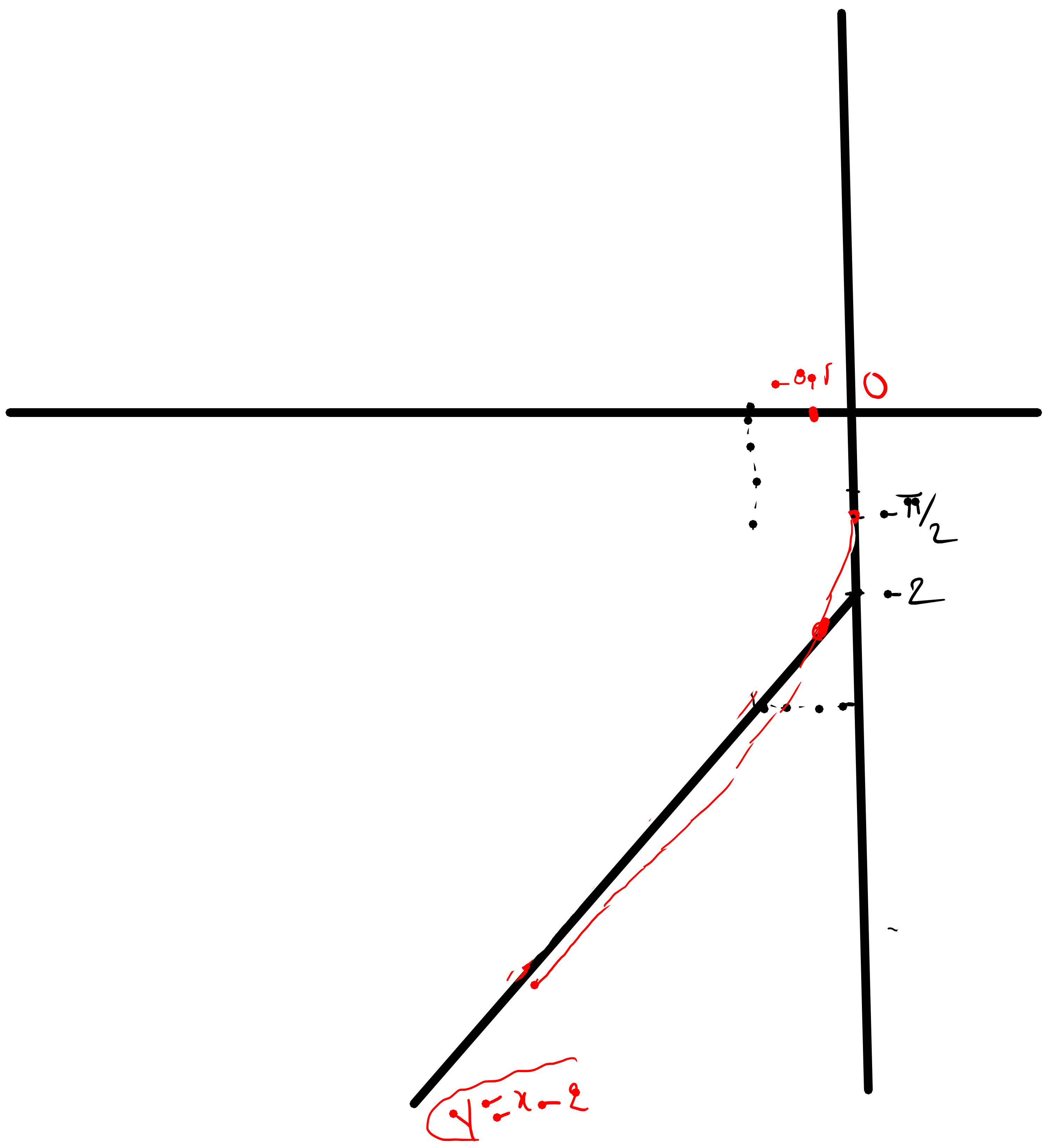
$= (x-1)\, h(x)$ (a vérifier)

x	$-\infty$		0
$(x-1)$		$-$	
$h(x)$		$-$	
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{\pi}{2}$

$\left(\arctan 1/x\right)'$

$= -(\arctan x)'$

$\left(\arctan x + \arctan \frac{1}{x}\right)' = \left(-\frac{\pi}{2}\right)'$



$y = x - 2$

$x = 0 \to y = 2$

$x = -1 \to y = -1$

○ Exercice 01 : (03pts)

⇨ On considère les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$a_n = \left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{1+k^2}\right) - \arctan(n+1) \text{ et } b_n = \left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{1+k^2}\right) - \arctan(n).$$

1)- Soit $k \in \mathbb{N}$. En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que :

$$\arctan(k+1) - \arctan(k) < \frac{1}{1+k^2} < \arctan(k) - \arctan(k-1).$$

1

2 2)- Montrer que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

فرض رقم 2

التمرين الأول :

لتكن $(U_n)_n$ متتالية معرفة بما يلي :

$U_n = \sum_{p=0}^{p=2n+1} \frac{n}{n^2+p}$ لكل عدد طبيعي غير منعدم n

1) بين أن $2 - \frac{2}{n+1} \le U_n \le 2 + \frac{2}{n}$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$

2) أ- تحقق أن $\sqrt{n} - \sqrt{n-1} \ge \frac{1}{2n}$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$

ب- استنتج أن $\sum_{p=1}^{p=n} \frac{1}{p} \le 2\sqrt{n}$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$

3) نضع $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} U_k$ لكل عدد طبيعي غير منعدم n

بين أن $2n - 4\sqrt{n+1} \le S_n \le 2n + 4\sqrt{n}$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$

و حدد $\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n}$

التمرين الثاني :

لتكن $(U_n)_n$ متتالية هندسية حدودها غير منعدمة أساسها q .

لكل عدد طبيعي n نضع : $S = U_0 + U_1 + ... + U_{n-1}$

و $P = U_0 U_1 ...... U_{n-1}$ و $T = \frac{1}{U_0} + \frac{1}{U_1} + ... + \frac{1}{U_{n-1}}$

1) بين أن $\frac{S}{T} = U_0^2 \, q^{n-1}$

2) استنتج أن $P^2 = \left(\frac{S}{T}\right)^n$

التمرين الثالث :

نعتبر المتتاليتين $(U_n)_n$ و $(V_n)_n$ المعرفتين بما يلي : $U_n = \sum_{k=0}^{k=2n+1} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ و $V_n = \sum_{k=0}^{k=2n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$

1) بين أن $(U_n)_n$ و $(V_n)_n$ متحاذيتين

2) نضع $f_n(x) = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}$

أ- بين أن $f_n'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{1+x^2}$

ب- أثبت أن $f_{2n+1}(x) \le \arctan x \le f_{2n}(x)$ $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$

ج- استنتج نهاية كل من المتتاليتين $(U_n)_n$ و $(V_n)_n$

EXERCICE (4)

on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \arctan\sqrt{x+2} & ; \quad x \geq -2 \\ f(x) = x + 2 - \sqrt{x^2 + 2x} & ; \quad x < -2 \end{cases}$

1) a) montrer que f est continue au point -2

b) étudier la dérivabilité de f à gauche et à droite du point -2

2) a) calculer la limite $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

b) étudier les branches infinies de la courbe (C_f)

3) a) calculer $f'(x)$ sur chacun des intervalles $]-\infty, -2[$ et $]-2, +\infty[$

b) étudier les variations de f et dresser sa table de variation

4) a) montrer que $(\forall x \in]-\infty, -2[)\ f(x) \geq 2x + 3$

b) tracer la courbe (C_f)

5) soit g la restriction de la fonction f sur $]-\infty, -2[$

a) Montrer que g est une bijection de $]-\infty, -2[$ vers un intervalle J à déterminer

b) calculer $g^{-1}(x)$ pour tout x de J

c) tracer dans le repère précédant la courbe de la fonction réciproque g^{-1}

6) soit $(U_n)_n$ la suite définie par : $U_0 = 2$ et $U_{n+1} = f(U_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$

a) montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une seule solution α dans $[1,2]$

b) montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$ $\arctan x \leq x$

c) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$ $1 < U_n \leq 2$

d) étudier la monotonie de la suite $(U_n)_n$ puis déduire qu'elle est convergente et déterminer sa limite

5 Les branches infinies

Les branches infinies

- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$
  - $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}=a\neq 0$
    - $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x)-ax)=b$
      - la droite $y=ax+b$ est une asymptote oblique
    - $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x)-ax)=\infty$
      - (C_f) admet une branche parabolique suivant $(D):y=ax$
  - $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}=0$
    - (C_f) admet une branche parabolique suivant (OX)
  - $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}=\infty$
    - (C_f) admet une branche parabolique suivant (OY)
- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\beta$
  - la droite $x=\beta$ est une asymptote horizontale
- $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=\infty$
  - la droite $x=\alpha$ est une asymptote verticale

La droite d'équation $y=ax+b$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $\pm\infty$ $\iff \lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-(ax+b))=0$

Attention ⚠

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-ax)=\pm\infty \not\Rightarrow$ (C_f) admet une branche parabolique suivant La droite d'équation $y=ax$ au voisinage de $\pm\infty$

→ Rappel sur $\sum$ ←

1) $\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$

2) $a_k \leq b_k \Longrightarrow \sum_{k=1}^{n} a_k \leq \sum_{k=1}^{n} b_k$

3) $\sum_{1}^{n} (a_k \mp b_k) = \sum_{1}^{n} a_k \mp \sum_{1}^{n} b_k$

4) $\sum_{k=p}^{n} \alpha = (n-p+1)\cdot \alpha$.

$$\sum_{k=2}^{k=100} 2 = (100-2+1)\times 2 = 99\times 2$$

5) $\sum_{k=1}^{n} a^k = a^1 \cdot \left(\frac{1-a^{(n-1+1)}}{1-a}\right)$ (Somme d'une suite geometrique de raison a

6) $\sum_{1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ (Somme de suit ari de raisn

• (U_n) suite arithm

$$\sum_{k=p}^{n} U_k = \frac{n-p+1}{2}\cdot (U_p + U_n)$$

• (U_n) Suite géometrique

de raison $q \neq 1$

$$\sum_{p}^{n} U_k = U_p \cdot \left(\frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}\right)$$

• Somme télescopique

$$\sum_{k=p}^{n} (a_{k+1} - a_k)$$

$$= (\cancel{a_{p+1}} - a_p) + (\cancel{a_{p+2}} - \cancel{a_{p+1}}) + \cdots + (a_{n+1} - \cancel{a_n})$$

$$= a_{n+1} - a_p$$

Exemple :

$$\sum_{2}^{100} \frac{1}{k} - \frac{1}{k-1} =$$

$$= \cancel{\frac{1}{2}} - \frac{1}{1} + \cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{2}} + \cdots + \frac{1}{100} - \cancel{\frac{1}{99}}$$

$$= \frac{1}{100} - 1 = \frac{-99}{100}.$$

$\boxed{\text{T.A.F}}$

L'inegalité des Accroissements Finies

- Si f continue sur $[a,b]$
- et f dérivable sur $]a,b[$
- et $\forall x \in]a,b[$; $m \leq f'(x) \leq M$

Alors : $\boxed{m \leq \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq M}$

Exercice 2

1) a) en utilisant le théorème des accroissement finis montrer que

$$(\forall x \geq 0) \quad \frac{x}{1+x^2} \leq \arctan x \leq x$$

b) déduire la limite $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x - \arctan x}{x^2}$

2) utiliser le théorème des accroissement finis et montrer que

$$(\forall x > 1) \quad \arctan(x+1) - \arctan x \leq \frac{1}{1+x^2} \leq \arctan x - \arctan(x-1)$$

3) a) utiliser le théorème des accroissement finis et montrer que

$$(\forall x \geq 0) \quad \sin x \leq x$$

b) démontrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad \cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$

4) en utilisant le théorème des accroissement finis calculer la limite

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt[n]{x^{n-1}} \left(\sqrt[n]{x+1} - \sqrt[n]{x} \right)$$

Exercice 3

Exercice 3

soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \arctan\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$

1) a) montrer que $(\forall x \in \mathbb{R})$ $\sqrt{x^2+1} - x \geq 0$

b) exprimer $f(-x)$ en fonction de $f(x)$ que peut-on déduire ?

2) montrer que f est dérivable $\mathbb{R}$ puis calculer $f'(x)$

3) en déduire que $(\forall x \in \mathbb{R})$ $\arctan\left(\sqrt{x^2+1} - x\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\arctan x$

Exercice 4

On considère la fonction F définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par : $F(x) = 4x(\pi - x) - \pi \sin^2 x$

1) montrer que F est deux fois dérivable et que $F''(x) = -2(4 + \pi\cos 2x)$

2) étudier le sens de variation de F' déduire le signe de $F'(x)$

3) en déduire ue $\left(\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$ $\sin^2 x \leq \frac{4}{\pi} x(\pi - x)$

Exercice 5

Suites numériques

EXERCICE (1)

On pose $(\forall n \geq 1) \quad U_n = \dfrac{1}{2\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{k=n} \dfrac{1}{\sqrt{k}}$

1) montrer que $(\forall k \geq 1) \quad \dfrac{1}{2\sqrt{k+1}} \leq \sqrt{k+1} - \sqrt{k} \leq \dfrac{1}{2\sqrt{k}}$

2) a) déduire un encadrement du terme U_n de la suite $(U_n)_{n\geq 1}$

b) déterminer la limite de $(U_n)_{n\geq 1}$

EXERCICE (2)

On pose $u_n = \sqrt[n]{n} - 1$ pour tout entier n tel que $n \geq 2$

1) montrer que $(\forall n \geq 2) \quad u_n \geq 0$

2) montrer que $(\forall n \geq 2) \quad n \geq C_n^2 (u_n)^2$ en déduire $(\forall n \geq 2) \quad u_n \leq \sqrt{\dfrac{2}{n-1}}$

3) montrer que $(u_n)_n$ est convergente et déterminer sa limite

EXERCICE (3)

Soit n un entier de $\mathbb{N}^*$. on considère la fonction f_n définie sur $]0,1[$

par : $f_n(x) = \tan\left(\dfrac{\pi}{2}x\right) - \dfrac{\pi}{2nx}$

1) montrer que $f_n(x) = 0$ admet une unique solution notée α_n

2) montrer que $(\alpha_n)_n$ est décroissante et qu'elle est convergente

3) montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$

4) déterminer la limite de $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n \sqrt{n}$

EXERCICE (4)

Dans chacun des deux cas montrer que $(u_n)_n$ *et* $(v_n)_n$ sont adjacentes

1) $u_n = \left(\sum_{k=1}^{k=n} \dfrac{1}{\sqrt{k}}\right) - 2\sqrt{n+1} \quad ; \quad v_n = \left(\sum_{k=1}^{k=n} \dfrac{1}{\sqrt{k}}\right) - 2\sqrt{n}$

2) $u_n = \prod_{k=1}^{k=n} \cos\left(\dfrac{\pi}{2^k}\right) \quad ; \quad v_n = u_n \cos\left(\dfrac{\pi}{2^n}\right)$

EXERCICE (5)

On pose $S_n = \sum_{p=1}^{p=n} \frac{1}{\sqrt{p}}$ et soit la suite $(U_n)_n$ définie par : $U_n = \frac{S_n}{\sqrt{n}}$

1) montrer que $(\forall p \in \mathbb{N}^*)$ $2\left(\sqrt{p+1} - \sqrt{p}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{p}}$

2) déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $S_n \geq 2\sqrt{n+1} - 2$ et déterminer $\lim_{n\to+\infty} S_n$

3) monter par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $S_n \leq \sqrt{n} + \sqrt{n-1}$

Puis déduire $\lim_{n\to+\infty} U_n$

EXERCICE (6)

Déterminer dans chacun des cas suivants la limite de la suite $(U_n)_n$

1) $U_n = 5\times 3^{n+1} - 2\times 5^n$; 2) $U_n = 2^n \sin\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)$ و $x \in \mathbb{R}^*$

3) $U_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{k=n} k$ $U_n = \sum_{k=2}^{k=n} \frac{2}{k^2-1}$ 4) $U_{n+1} \geq 2U_n$ et $U_0 \in \mathbb{R}^{*+}$

5) $U_n = \sum_{p=1}^{p=n} \frac{1}{4p^2-1}$ 6) $U_n = \sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)$

7) $U_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} E(kx)$ et $x \in \mathbb{R}^*$ 8) $U_n = \frac{2^n}{n^3}$ 9) $U_n = \frac{\sqrt{n}}{2^n}$

10) $U_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{(-1)^{k+1}}{3^k}$ 11) $U_n = \sum_{k=1}^{k=n^2} \frac{1}{1+\sqrt{kn}}$

12) $U_n = \sum_{p=1}^{p=n} \frac{1}{\sqrt{p+1}+\sqrt{p}}$