Série 1 : Notions de logique prof : oulahri 1BAC exp

- **Une proposition** : est un énoncé mathématique pouvant être vrai ou faux (une proposition ne peut pas être vrai et fausse au même temps)
- **Une fonction propositionnelle** est un énoncé qui contient une variable x d'un ensemble, elle devient proposition chaque fois qu'on remplace la variable x par un élément de cet ensemble

Exemples :

1) 2 est un nombre impair : ....
2) Tout nombre premier est impair ....
3) Pour tout x de $\mathbb{R}$ on a $x^2+x+1>0$ ....
4) $P(t)$: $t \in \mathbb{Z}$ $t^2-1\geq 0$ ....

- La quantificateur existentiel noté $\exists$, exprime l'existence : « il existe au moins »
- La quantificateur universel noté $\forall$, exprime « pour tout » ou « quel que soit »

Exercice 1 : A l'aide des quantificateurs et connecteurs logiques, écrire les propositions suivantes :

P_0 : *La fonction f est positive sur l'intervalle I.*

P_1 : « l'équation $x^2-3x+2=0$ admet au moins une solution réelle »

P_2 : « l'équation $x^2-3x+2=0$ admet une unique solution réelle »

P_3 : « le carré de tout nombre réel est toujours positif »

P_4 : « il existe au moins un réel a, tel que pour tout réel x positif on a $a\leq x$ »

P_5 : Pour tout entier naturel n, il existe au moins un entier naturel m tel que : $m \geq n$

P_6: «il n'existe aucun nombre rationnel x tel que $x^2=3$ »

P_7: L'équation $x^2=2$, n'admet aucune solution dans l'ensemble $\mathbb{Q}$.

Exercice 2 : **Déterminer la valeur de vérité des propositions suivantes :**

P_1 : $(\exists x\in\mathbb{R})$: $x^2-3x+2=0$	P_2 : $\forall x\in\mathbb{R}$ $x^2>0$
P_3 : $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$ $x^2>y$	P_4 : "$(\forall x\in\mathbb{R});-1\leq\cos(x)\leq 1$"
P_5 : $(\forall x\in\mathbb{R})(\exists y\in\mathbb{R})$ $x>y$	P_6 : $(\exists y\in\mathbb{R})(\forall x\in\mathbb{R})$ $x>y$
P_7 : $(\exists x\in\mathbb{Z})(\exists y\in\mathbb{Z})$ $y(x^2+1)=1$	P_8 : $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$ $x^2+y^2>x+y$
P_9 : $(\forall a\in\mathbb{R})(\exists x\in\mathbb{R})$ $ax^2+ax-1+a=0$	P_{10}: Q:"$(\exists x\in\mathbb{Q});2x^2+3x=0$"

La négation d'une proposition P est une proposition noté : $\overline{P}$ qui est vraie si P est fausse et qui est fausse si P est vraie

Symbole	$\forall x\in E$	$\in$	$\geq$	$\subset$	$\leq$	$=$	
négation	$\exists x\in E$	$\notin$	$<$	$\not\subset$	$>$	$\neq$	

Exercice 3 :

Donner la négation de chacune des propositions d'exercice 2.

- **La conjonction** de deux propositions P *et* Q est une proposition noté « P *et* Q » qui est vraie si st seulement si P *et* Q sont vraies en même temps
- **La disjonction** de deux propositions P *et* Q est une proposition noté « P *ou* Q » qui est fausse si st seulement si P *et* Q sont fausses en même temps
- la négation de $(P \text{ et } Q)$ est $(\overline{P} \text{ ou } \overline{Q})$
- la négation de $(P \text{ ou } Q)$ est : $(\overline{P} \text{ et } \overline{Q})$

Exercice 3 : Etudier la valeur de vérité et déterminer la négation des propositions suivantes :

P_1 : $(4=3\ \ ou\ \ 6\leq 0)$;	P_4 : $(\sqrt{3}\notin\mathbb{Q}\ et\ \ -6\leq 0)$;
P_2: $\left(8>5\ ou\ \frac{1}{2}\in\mathbb{Z}\right)$	P_5 : $(4\neq 3\ \ et\ \ \lvert 3-\pi\rvert=\pi-3)$;
P_3: $(\forall x\in\mathbb{R}^+)$: $(\sqrt{x}<x)\ ou\ (x-1\geq 0)$.	P_6 : $\left(\left(\sqrt{2}+1\right)^2\geq 5\ \ et\ \ \sqrt{3}\leq 2\right)$;

Série 2 : Notions de logique prof : oulahri	1BAC exp

L'implication des propositions P et Q est une proposition noté « $P \Rightarrow Q$ » et qui est fausse seulement quand P est vraie et Q est fausse

- la négation de la proposition $(P \Rightarrow Q)$ est la proposition: $(P \text{ et } \overline{Q})$
- **Pratiquement** : Pour montrer que $P \Rightarrow Q$ est vraie on suppose que P est vraie et on démontre que Q est vraie

Exemples :

Etudier la valeur de vérité et déterminer la négation des propositions suivantes :

$P_1 : (4 = 3 \Longrightarrow 6 \leq 0)$; $P_2 : \left(8 > 5 \Rightarrow \frac{1}{2} \in \mathbb{Z}\right)$ $P_3 : \sqrt{2} > 1 \Rightarrow \cos\pi = 1$

Exercice 4 :

1) Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$; Montrer que : $(x^2 + y^2 = 2xy) \Rightarrow (x = y)$
2) Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$; Montrer que : $(1 + xy - x - y = 0) \Rightarrow (y = 1 \text{ ou } x = 1)$
3) Montrer que : Si m et n sont deux entiers naturels impairs alors $m + n$ est pair
4) Monter que : $-2 \leq x \leq \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{-3x+5}{x+4} \leq \frac{11}{2}$
5) Monter que : $(\forall x > 1)(\forall y > 4)$ $2\sqrt{x-1} + 4\sqrt{y-4} = x + y \Rightarrow x = 2 \quad et \quad y = 8$
6) Monter que : $\forall (a, b) \in \mathbb{R}_+^2$ $b < a \Rightarrow \sqrt{1+a} - \sqrt{a} < \sqrt{1+b} - \sqrt{b}$

L'équivalence des propositions P et Q est une proposition noté « $P \Leftrightarrow Q$ » et qui est vraie si P et Q sont simultanément vraies ou fausses

- Les propositions « $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$ » et $P \Leftrightarrow Q$ ont la même valeur de vérité
- $\begin{cases} P \Leftrightarrow Q \\ Q \Leftrightarrow R \end{cases} \Rightarrow P \Leftrightarrow R$
- **Pratiquement** : Pour montrer que $P \Leftrightarrow Q$ est vraie on démontre que $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$

exepmles : Etudier la valeur de vérité des propositions suivantes :

$P_1 : (4 = 3 \Leftrightarrow 6 \leq 0)$;	$P_4 : \left(\sqrt{3} \notin \mathbb{Q} \Leftrightarrow -6 \leq 0\right)$;
$P_2 : \left(8 > 5 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \in \mathbb{Z}\right)$	$P_5 : (4 \neq 3 \Leftrightarrow \lvert 3 - \pi \rvert = \pi - 3)$;

.

Exercice 5 :

1) Monter que : $(\forall x > 1)(\forall y > 1)$ $x = y \Leftrightarrow \frac{x}{1+x^2} = \frac{y}{1+y^2}$
2) soit x un nombre réel positif montrer que : $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x+1} + \sqrt{x} = 1$
3) Soient a et b deux réels positifs Montrer que : $(a + b = 0) \Leftrightarrow (a = 0 \text{ } et \text{ } b = 0)$
4) Monter que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ $x = 1$ et $y = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2+y^2}{2} = x + y - 1$
5) x et y deux réels positifs. Montrer que : $\left(x + y + 13 = 4\sqrt{x} + 6\sqrt{y}\right) \Leftrightarrow (x = 4 \text{ } et \text{ } y = 9)$
6) Soit $x \in \mathbb{R}$; Montrer que $\frac{x^2+x+1}{x^2+1} \leq \frac{3}{2}$

Série 3 : Notions de logique prof : oulahri	1BAC exp

Exercice 6 :

1. Donner la négation de chacune des propositions suivantes :

$P: (\forall x \in \mathbb{R});\ \sqrt{x^2+1} > x$	$Q: (\exists x \in \mathbb{R}^*);\ \left(x^2 \leq x \text{ ou } 1+\dfrac{1}{x} < 0\right)$
$R: (\forall y \in \mathbb{R}^*)(\exists x \in \mathbb{R});\ x^2 - xy + y^2 = 0$	$S: (\forall x \in \mathbb{R}); x^2 \in \mathbb{Z} \Longrightarrow x \in \mathbb{Z}$
$T: \forall (a;b) \in \mathbb{R}^{*2}: \dfrac{a}{b} > 0 \Leftrightarrow ab > 0$	$M: \left(\exists (x;y;z) \in \mathbb{R}^3;\ \dfrac{x-1}{2} = y+2 = \dfrac{z-2}{3}\right)$

2) Donner la valeur de vérité des propositions $P; Q; R$ et S.

Le raisonnement par contraposé :

La contraposée de « $P \Rightarrow Q$» est la proposition « $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$ »

Pour montrer $P \Rightarrow Q$ il veut mieux parfois de montrer que : $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$

Exercice 7 :

1) Monter que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}_*^2 \quad y \neq \frac{-3}{4}x \Rightarrow \frac{x-y}{x+y} \neq 7$

2) Monter que : $\forall (x,y) \in [1,+\infty[^2 \quad y \neq x \Rightarrow x^2 - 2x \neq y^2 - 2y$

3) $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R});\left(x \neq y \Rightarrow (x-1)(y+1) \neq (x+1)(y-1)\right)$

4) **Montrer que :** $\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^2 \quad x \neq y \Rightarrow x + \sqrt{2x+1} \neq y + \sqrt{2y+1}$

Le raisonnement par récurrence :

Le principe de récurrence permet de montrer qu'une proposition de la forme : $\forall n \geq n_0 \quad P(n)$ est vraie

1^{er}étape : on prouve que $P(n_0)$ est vraie

$2^{éme}$étape : on suppose que $P(n)$ est vraie

$3^{éme}$étape : on montre que $P(n+1)$ est vraie

$4^{éme}$étape : on conclut que $\forall n \geq n_0 \quad P(n)$ est vraie

Exemple :

1. **Montrons que : pour tout n de $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $7^n - 2^n$ est un multiple de 5**
2. **Montrer que :** $(\forall n \in \mathbb{N}^*);\ 10^n - 1$ est divisible par 9

Exercice 8:

1) Montrons que : pour tout n de $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $9^n - 5^n$ est un multiple de 4

2) On pose : $S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n$

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad S_n = \frac{n(n+1)}{2}$

3) Soit q un nombre réel tel que : $q \neq 1$

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

4) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Soit x un nombre réel positif

5) Monter que pour tout n de $\mathbb{N}$ on a : $(1+x)^n \geq 1 + nx$

6. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); 1 + 2 + 2^2 + \cdots\cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$

7. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); 1 + 3 + 5 + \cdots\cdots + (2n+1) = (n+1)^2$