Série 4 : Notions de logique

1BAC EXP

Exercice 8:

1) Montrons que : pour tout n de $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $9^n - 5^n$ est un multiple de 4

2) On pose : $S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n$

   Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$ $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$

3) Soit q un nombre réel tel que : $q \neq 1$

   Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$ $1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

4) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Soit x un nombre réel positif

5) Monter que pour tout n de $\mathbb{N}$ on a : $(1+x)^n \geq 1 + nx$

6. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); 1 + 2 + 2^2 + \cdots\cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$

7. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); 1 + 3 + 5 + \cdots\cdots + (2n+1) = (n+1)^2$

Le raisonnement par l'absurde : Soient P et Q deux propositions

La proposition suivante est une loi logique : $\left[(\overline{P} \Rightarrow Q)\ \ et\ \ (\overline{P} \Rightarrow \overline{Q})\right] \Rightarrow P$

- **Pratiquement** :

  Pour montrer qu'une proposition P est vraie on suppose que P est fausse c'est à dire $\overline{P}$ est vraie

  Si on montre que $\overline{P} \Rightarrow Q$ est vraie avec Q est une proposition fausse alors c'est une absurde donc l'hypothèse est fausse , alors on conclut que P est vraie

Exemple :

Montrons que : $\forall x \in \mathbb{R}^*$ $\sqrt{1 + x^2} \neq 1 + \frac{x^2}{2}$

Exercice 9 :

1) Soit n un entier naturel tel que n^2 est un nombre pair

   Montre que n est un nombre pair

2) Soit ABC un triangle qui a pour dimension $AB = 3$ $AC = 4$ et $BC = 6$.

   Montrer que le triangle ABC n'est pas rectangle en A

3) Montrer que : $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

4) Monter que pour tout n de $\mathbb{N}$ on a : $\sqrt{n^2 + 14} \notin \mathbb{N}$

5) Montrer que le système suivant n'admet pas de solutions : $\begin{cases} 2x - 3z > 3 \\ 3y - 2x \geq 3 \\ y - z \prec 2 \end{cases}$.

Le raisonnement par disjonctions des cas :

La proposition suivante est une loi logique : $[(P \Rightarrow Q)\ \ et\ \ (R \Rightarrow Q)] \Rightarrow [(P\ \ ou\ \ R) \Rightarrow Q]$

Exemple :

Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N})$: $\frac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{N}$

Exercice 10 :

1) Montrons que pour tout n de $\mathbb{N}$ on a : $A = n^2 + 7n + 1$ est un nombre impair

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^2 - |x - 1| + 1 = 0$

Exercice 11:

1) Déterminer la négation de la proposition (P) et détermine sa valeur de vérité

$(\boldsymbol{P}): \ (\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R})(\exists \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}) \quad \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}^2 + \mathbf{3}) = \mathbf{3}$

3) Montrer que : $\forall (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \quad \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y} \ \Rightarrow \boldsymbol{x}^2(\boldsymbol{y} + \mathbf{1}) \neq \boldsymbol{y}^2(\boldsymbol{x} + \mathbf{1})$

Exercice 12:

En utilisant un raisonnement par équivalence, montrer que :

1. $(\forall\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}) : \sqrt{\mathbf{x}^2 + \mathbf{5}} \geq \mathbf{3} \Leftrightarrow \mathbf{x} \geq \mathbf{2}$ **ou** $\mathbf{x} \leq -\mathbf{2}$.
2. $(\forall (\mathbf{x}; \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^2) : \ \mathbf{x}^3 + \mathbf{x} = \mathbf{y}^3 + \mathbf{y} \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$.
3. $(\forall\ \mathbf{x} \geq \mathbf{2})(\forall\ \mathbf{y} \geq \mathbf{3}) : \ \sqrt{\mathbf{x} - \mathbf{2}} + \mathbf{2}\sqrt{\mathbf{y} - \mathbf{3}} = \frac{\mathbf{x}+\mathbf{y}}{\mathbf{2}} \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{3}$ **et** $\mathbf{y} = \mathbf{7}$.