DEVOIR N°1

Exercice 1.

on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \arctan(x-1) + \arctan(x) + \arctan(x+1)$$

1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers J à déterminer.

2. Montrer que l'équation $f(x) = \frac{\pi}{2}$ admet une solution unique a dans $\mathbb{R}$ et que $a \in]0;1[$

3. Donner la valeur précise de a

DEVOIR N°1

Exercice 2.

Pour tout $t \in \left]-\infty;0\right]$, on considère la fonction h_t définie sur $\mathbb{R}$ par : $h_t(x) = x^3 + x + t$

1. Montrer que pour tout $t \in \left]-\infty;0\right]$ l'équation $h_t(x) = 0$ admet une solution unique C_t dans $\mathbb{R}$

2. On considère la fonction f définie sur $\left]-\infty;0\right]$ par : $f(t) = C_t$

   a. Montrer que f est positive sur $\left]-\infty;0\right]$.

   b. Montrer que f est strictement décroissante sur $\left]-\infty;0\right]$.

   c. Montrer que : $\left(\forall (x, y) \in \mathbb{R}_-^2\right); \left|f(x) - f(y)\right| \leq |x - y|$ et en déduire que f est continue sur $\left]-\infty;0\right]$.

3. Montrer que : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

4. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur J à déterminer.

5. Déterminer $f^{-1}(t)$ pour tout $t \in J$.

DEVOIR N°1

Exercice 3.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ .On considère la fonction f_n définie sur $[0;1]$par : $f_n(x) = x^{n+1} + x^n + 3x - 2$

1. Étudier la monotonie de la fonction f_n
2. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une solution unique α_n dans $\mathbb{R}^+$
3. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\quad \alpha_n < \dfrac{2}{3}$
4. a. Étudier le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$

   b. Étudier la monotonie de la suite$(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

   c. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\quad \sqrt{6} - 2 \le \alpha_n < \dfrac{2}{3}$

EXERCICE 20

Soit f la fonction définie par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

1- Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

2- a- Calculer $f'(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$

b- Dresser le tableau de variations de f

c- Déterminer $f(]-\infty;0])$; $f([0;2])$ et $f([0;3])$

3- a- Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet exactement trois solutions α ; β et γ tels que : $\alpha < 0$; $0 < \beta < 2$ et $\gamma > 0$

b- Étudier le signe f sur $\mathbb{R}$

4- Montrer que l'équation $f(x)=2$ admet une solution unique λ sur $\mathbb{R}$ et vérifier que $\lambda \in]3;4[$

EXERCICE 12

Simplifier l'expression suivant $A=\dfrac{\sqrt[3]{\sqrt{2}}.\sqrt[4]{8}.\sqrt[3]{32}}{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}.\sqrt[3]{\sqrt[4]{32}}}$

EXERCICE 8

Calculer les limites suivantes.

$\boxed{1}$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2-1} - 2x$ $\boxed{2}$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[3]{x^3-1} - 2x$

$\boxed{3}$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2-1} - x$ $\boxed{4}$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{4x^2-x-1} - 2x+1$

EXERCICE 10

ـله إلا أنت أستغفرك وأتوب إليك

Calculer les limites suivantes

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} - \sqrt[3]{x} - \sqrt[4]{x}$
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x-1} - 1}{\sqrt{x-1} - 1}$
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x} - 1}$

Exercice 4

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f(x) = \arctan\left(\left(\sqrt{x}-1\right)^3\right)$$

1) calculer les limites $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)}{x-1}$

2) montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}^+$ vers un intervalle J que l'on déterminera

3) calculer $f^{-1}(x)$ pour tout x de J $\square$

Exercice 5 1) soit k un entier supérieur ou égal à 2 . calculer $\lim\limits_{t\to1}\frac{t^k-1}{t-1}$

2) Soit $a\in\mathbb{R}^*$ montrer que $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[n]{1+ax}-1-\frac{ax}{n}}{x^2}=-\frac{(n-1)a^2}{2n^2}$ (poser $t=\sqrt[n]{1+ax}$)

3) déduire la limite $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+2x}\sqrt[3]{1-3x}-1}{x^2}$

4) soit h la fonction telle que $h(x)=\frac{\sqrt{1+2x}-\sqrt[3]{1-3x}-2x}{x^2}$; $x\neq0$ et $h(0)=\frac{1}{2}$

a) déterminer D_h et étudier la continuité de h sur $D_h-\{0\}$

b) montrer que h est continue sur D_h

2) calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{E(ax)}{x}$ puis déduire la limite $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{E(2x)+E(-3x)+E(6x)}{E(x)+E(5x)+E(6x)}$

3) a) montrer que $\left(\forall (a,b) \in \mathbb{R}^{+2}\right) \quad \arctan a - \arctan b = \arctan \dfrac{a-b}{1+ab}$

b) calculer la limite $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^3}\left(\arctan\sqrt{2+x} - \arctan\sqrt{x}\right)$

4) montrer que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos^n(ax)}{x^2} = \dfrac{p\,a^2}{2}$ et déduire $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos^3(7x)\cos^5(6x)\cos^7(23x)}{x^2}$

Exercice (2) Soit f la fonction telle que : $f(x) = \dfrac{1+\cos\left(\pi\sqrt{x+1}\right)}{x^2}$

Montrer que f admet un prolongement h par continuité en $a = 0$

(poser $t = \sqrt{x+1} - 1$) puis définir h

Durée : 02 heures

➤ **Note :** l'usage de la calculatrice et du téléphone portable est interdit.
Regardez l'ensemble du sujet et débutez par ce que vous savez le mieux faire.

○ Exercice 01 : (04pts)

4 ✓ Calculer chacune des limites suivantes :

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-3x+2},\ \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+7}+x^2-7}{x-2},\ \lim_{x\to-\infty} x+\sqrt{4x^2+1} \text{ et } \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+x+1}-x}{x}.$$

○ Exercice 02 : (05pts)

⇨ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=ax^2+2x;\text{si } x\geq\frac{1}{2} \text{ et } f(x)=\frac{1}{1-x};\text{si } x<\frac{1}{2} \text{ Où } a\in\mathbb{R}.$$

2 1)- Montrer que est continue sur $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$ et $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$.

1 2)- Pour quelle valeur de a la fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

3)- Dans cette question, on suppose que : $a=4$.

2 ✓ Etudier la dérivabilité de f en $x_0=\frac{1}{2}$, puis donner une interprétation géométrique du résultat obtenu.

○ Exercice 03 : (11pts)

⇨ On considère la fonction f définie par :

$$f(x)=x+2\sqrt{1-x}.$$

1,5 1)- a)- Déterminer D_f et calculer : $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

1,5 b)- Justifier soigneusement que f est continue sur D_f.

1,5 2)- a) - la fonction f est-elle dérivable à gauche en $x_0=1$? donner l'interprétation géométrique du résultat obtenu.

1,5 b) - Montrer que : $(\forall x\in\left]-\infty;1\right[);\ f'(x)=\frac{-x}{1-x+\sqrt{1-x}}$. Puis dresser le tableau de variation complet de f en justifiant la réponse.

1 3)- a)- Montrer que l'équation $(E): f(x)=0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $\left]-5;-4\right[$.

1,5 b)- Vérifier que : $\alpha^2+4\alpha-4=0$, puis en déduire la valeur exacte de α.

4)- Soit g la restriction de f à l'intervalle $I=[0;1]$.

1 a)- Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur $J=[1;2]$.

1,5 b)- Exprimer $g^{-1}(x)$ en fonction de x pour tout $x\in J$.

Fin Du Sujet.