

Mouvement de rotation d'un solide indéformable autour d'un axe fixe

Mouvement de rotation d'un solide indéformable autour d'un axe fixe

I- Mouvement de rotation autour d'un axe fixe:

1) Définition :

Un solide possède un mouvement de rotation autour d'un axe fixe (Δ) si :
Tous les points du solide décrivent des trajectoires circulaires centrées sur l'axe de rotation, sauf les points qui appartiennent à cet axe.

Exemples :

On trouve beaucoup des exemples dans la vie courante :
La porte ; Roue de bicyclette ; Aiguilles d'une montre ;

2) Repérage d'un point du solide :

Pour repérer la position d'un point M d'un corps solide (S), en rotation autour d'un axe fixe, on choisit :

- ✓ Un repère orthonormé $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ tel que le vecteur \vec{k} est confondu avec l'axe de rotation (Δ).
- ✓ La trajectoire du point M contenue dans le plan (O, \vec{i}, \vec{j}) .

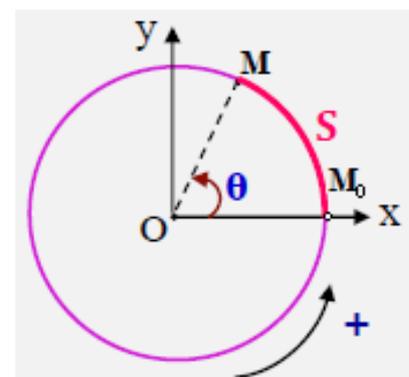
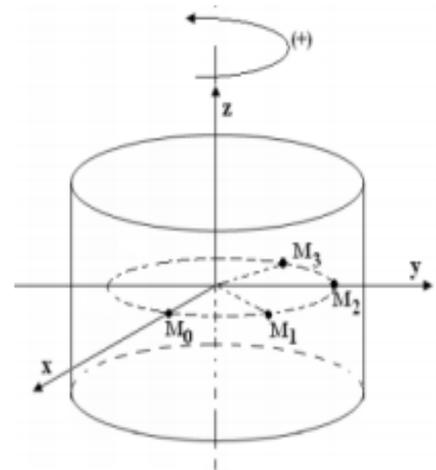
Nous pouvons repérer la position du point M à chaque instant en utilisant l'abscisse angulaire θ ou l'abscisse curviligne S .

a- L'abscisse angulaire θ :

L'abscisse angulaire du point M du solide en rotation autour d'un axe fixe (Δ) est l'angle orienté θ tel que :

$$\theta = (\overrightarrow{OM_0}, \overrightarrow{OM}) \quad (\text{rad})$$

\Rightarrow Au cours du mouvement du point M , l'abscisse angulaire varie en fonction du temps. On appelle l'équation $\theta(t)$: équation horaire du mouvement



Mouvement de rotation d'un solide indéformable autour d'un axe fixe

b- L'abscisse curviligne S :

L'abscisse curviligne du point M du solide en rotation autour d'un axe fixe (Δ) est l'arc orienté S tel que :

$$S = \widehat{M_0M} \quad (m)$$

\Rightarrow Au cours du mouvement du point M , l'abscisse curviligne varie en fonction du temps. On appelle l'équation $S(t)$: équation horaire du mouvement en fonction de l'abscisse curviligne

Remarque : Relation entre S et θ

$$S = r \cdot \theta \quad (m)$$

(m) (rad)

Avec :

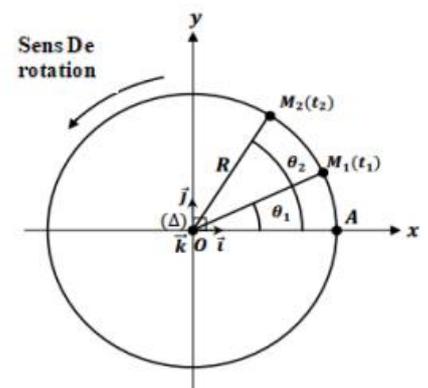
r : le rayon de la trajectoire circulaire.

II- Vitesse angulaire ω :

1) Vitesse angulaire moyenne :

On appelle vitesse angulaire moyenne ω_{moy} du point M entre les instants t_1 et t_2 la grandeur :

$$\omega_{\text{moy}} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} \quad (rad/s)$$



2) Vitesse angulaire instantanée :

On appelle vitesse angulaire instantanée ω_i du point M à l'instant t_i la grandeur :

$$\omega_i = \frac{\delta\theta}{\delta t} = \frac{\theta_{i+1} - \theta_{i-1}}{t_{i+1} - t_{i-1}} \quad (rad/s)$$

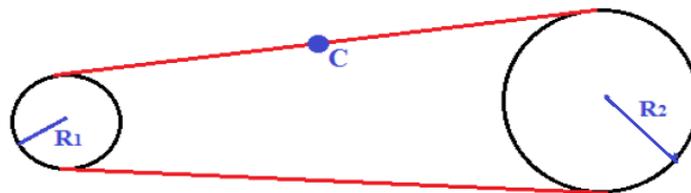
Mouvement de rotation d'un solide indéformable autour d'un axe fixe

Application n° ② : Exercice n° ② ; Série n° ①

On considère un système de deux poulies reliées par une courroie. La première poulie a un rayon $R_1 = 5\text{cm}$ et tourne à une vitesse angulaire constante $\omega_0 = 180\text{ rad.s}^{-1}$. La seconde a un rayon $R_2 = 30\text{cm}$.

- 1- La courroie porte une marque C. Calculer la vitesse de translation du point C au cours du mouvement.
- 2- Calculer la distance parcourue par C pendant une durée de 30 s.
- 3- Calculer la vitesse angulaire ω_2 de la seconde poulie.

Réponse



III- Mouvement de rotation uniforme:

1) Définition:

le mouvement de rotation d'un solide autour d'un axe fixe (Δ) est dit uniforme si sa vitesse angulaire ω de ce mouvement reste inchangée au cours du temps $\omega = \text{cte}$.

Remarque :

- ✓ Tous les points du solide ont la même vitesse angulaire, mais leurs vitesse linéaire augmentent lorsqu'on s'éloigne de l'axe de rotation.
- ✓ On exprime l'angle de rotation $\Delta\theta$ pendant la durée Δt par la relation :

$$\Delta\theta = \omega \cdot \Delta t$$

Mouvement de rotation d'un solide indéformable autour d'un axe fixe

2) Caractéristiques du mouvement de rotation uniforme:

a) La période T :

La période T est la durée nécessaire pour qu'un point M du solide effectue un tour.
Elle exprime par la relation :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (s)$$

En effet :

$$\Delta\theta = \omega \cdot \Delta t, \text{ lorsque } \Delta t = T, \Delta\theta = 2\pi$$

$$\text{Donc : } 2\pi = \omega \cdot T \text{ d'où : } T = \frac{2\pi}{\omega}$$

b) La fréquence f (ou N) :

La fréquence f est le nombre de tour effectué par le point M en une seconde.
Elle exprime par la relation :

$$f = \frac{1}{T} \quad (Hz)$$

Soit aussi :

$$f = \frac{\omega}{2\pi}$$

3) Equation horaire du mouvement :

On appelle équation horaire du mouvement la fonction $\theta = f(t)$ exprimée par :

$$\theta(t) = \omega \cdot t + \theta_0 \quad (rad)$$

Avec :

ω : la vitesse angulaire du solide en (rad/s) .

θ_0 : l'abscisse angulaire à l'origine des dates ($t_0 = 0$) en (rad)

Remarque :

On peut établir une autre forme de l'équation horaire du mouvement en fonction de l'abscisse curviligne $S(t)$:

$$S(t) = V \cdot t + S_0 \quad (m)$$

Avec :

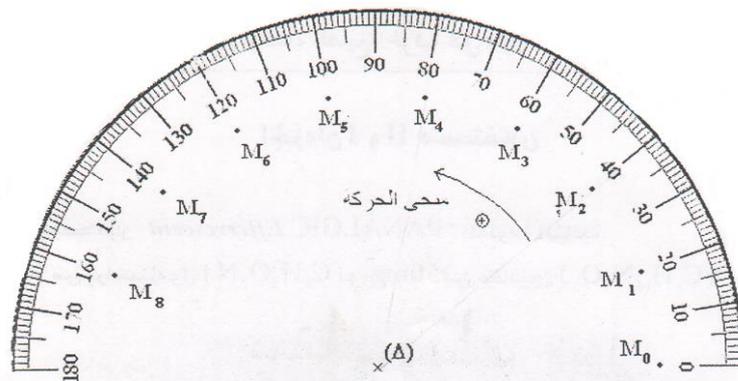
V : la vitesse linéaire instantanée d'un point M du solide, en (m/s) .

Mouvement de rotation d'un solide indéformable autour d'un axe fixe

$S_0 = r \cdot \theta_0$: l'abscisse curviligne à l'origine des dates ($t_0 = 0$), en (m)

Application n° ③ : Exercice n° ③ ; Série n° ①

La figure ci-dessous représente le mouvement d'un point M, appartient à une tige (T) en rotation autour d'un axe fixe (Δ), à des intervalles de temps successifs et égaux à $\tau = 40\text{ms}$



- 1- En utilisant la méthode d'encadrement ; $\omega_i = \frac{\theta_{i+1} - \theta_{i-1}}{2\tau}$ pour déterminer la vitesse angulaire ω_i à l'instant t_i , déterminer la vitesse angulaire ω_i du point M aux instants t_1, t_3 et t_5 .
- 2- Quelle est la nature du mouvement de la tige (T)? justifier.
- 3- Quelle est la nature du mouvement du point M ?
- 4- Déduire la vitesse linéaire V du point M.
- 5- Calculer la période T et la fréquence N du mouvement du point M.
- 6- Déterminer la durée nécessaire pour que la tige fasse cinq tours complètes.
- 7- Déterminer l'équation horaire $\theta = f(t)$ du mouvement ;
 - 7.1- Si on choisit comme origine des abscisses ($\theta = 0$) la position M_0 et comme origine des dates ($t = 0$) l'instant d'enregistrement du point M_0 .
 - 7.2- Si on choisit comme origine des abscisses ($\theta = 0$) la position M_0 et comme origine des dates ($t = 0$) l'instant d'enregistrement du point M_2 .
 - 7.3- Si on choisit comme origine des abscisses ($\theta = 0$) la position M_1 et comme origine des dates ($t = 0$) l'instant d'enregistrement du point M_2 .
- 8- Déduire l'équation horaire $S = f(t)$ du mouvement dans le cas de la question 6.2- .

Mouvement de rotation d'un solide indéformable autour d'un axe fixe

ISMAILI

Travail et puissance d'une force

I- Travail d'une force constante agissant sur un corps en translation:

1) Définition :

*) Force constante :

On dit qu'une force \vec{F} est constante ; si son vecteur garde :

- ✓ Même direction.
- ✓ Même sens.
- ✓ Même intensité.

*) Mouvement de translation :

On dit qu'un corps en mouvement de translation si le vecteur \overrightarrow{AB} , des deux points A et B de ce corps, garde la même direction au cours du mouvement :

- ✓ Si le mouvement d'un point M de ce corps est rectiligne, on dit que la translation est rectiligne ;
- ✓ Si le mouvement d'un point M de ce corps est circulaire, on dit que la translation est circulaire ;
- ✓ Si le mouvement d'un point M de ce corps est curviligne, on dit que la translation est curviligne.

2) Expression du travail d'une force constante agissant sur un corps en translation:

Le travail d'une force constante \vec{F} pour un déplacement \overrightarrow{AB} de son point d'application, est le produit scalaire de vecteur force \vec{F} et de vecteur déplacement \overrightarrow{AB} :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB} = F \cdot AB \cdot \cos(\alpha) \quad (J \equiv N \cdot m)$$

(N)
(m)
(°)

Avec : $\alpha = (\widehat{\vec{F}, \overrightarrow{AB}})$: l'angle entre les vecteurs \vec{F} et \overrightarrow{AB} .



Remarque :

*) Le travail d'une force est une grandeur algébrique :

- Si $W > 0$ on dit que : le travail est moteur.
- Si $W < 0$ on dit que : le travail est résistant.
- Si $W = 0$ on dit que : la force \vec{F} ne travaille pas.

$\alpha = 0^\circ$	$\alpha < 90^\circ$	$\alpha = 90^\circ$	$90^\circ < \alpha \leq 180^\circ$	$\alpha = 180^\circ$
$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = +F \cdot AB$	$W_{A \rightarrow B}(\vec{F})$ positif	$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = 0$	$W_{A \rightarrow B}(\vec{F})$ négatif	$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = -F \cdot AB$
Travail moteur		Travail nul	Travail résistant	

*) Le travail peut écrire en fonction des coordonnées du vecteur force \vec{F} et vecteur déplacement \vec{AB} dans un repère cartésienne (O, \vec{i}, \vec{j})

$$\vec{F} \begin{vmatrix} F_x \\ F_y \end{vmatrix} \Rightarrow \vec{F} = F_x \cdot \vec{i} + F_y \cdot \vec{j} \quad ; \quad \vec{AB} \begin{vmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{vmatrix} \Rightarrow \vec{AB} = (x_B - x_A) \cdot \vec{i} + (y_B - y_A) \cdot \vec{j}$$

D'où : $W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{AB} = F_x \cdot (x_B - x_A) + F_y \cdot (y_B - y_A)$

*) Le travail fourni par un ensemble de forces constantes $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$, exercées sur un corps solide en translation, est égal au produit scalaire de la somme vectorielle de ces forces $\sum \vec{F}$ et du vecteur déplacement \vec{AB} .

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) = \sum \vec{F} \cdot \vec{AB}$$

Application n° ① : Exercice n° ① ; Série n° ②

Calculer le travail de la force \vec{F} dans les cas suivants en précisant sa nature.

$\alpha = 0^\circ ; \alpha = 30^\circ , \alpha = 60^\circ , \alpha = 90^\circ , \alpha = 120^\circ , \alpha = 180^\circ$



On donne $F = 10N$ et $AB = 30 \text{ cm}$.

Réponse :

.....

.....

.....

.....

.....

.....

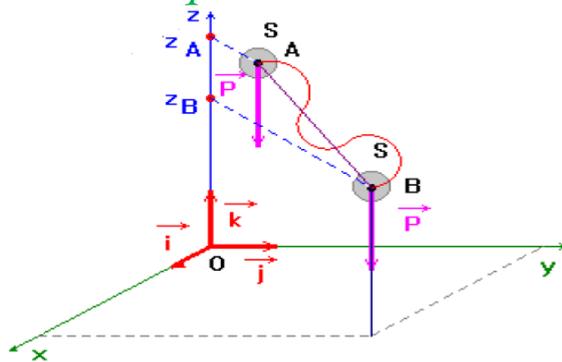
.....

.....

.....

.....

3) Travail du poids d'un corps :



Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ les coordonnées du poids \vec{P} et du vecteur déplacement sont :

$$\vec{P} \begin{cases} P_x = 0 \\ P_y = 0 \\ P_z = -m \cdot g \end{cases} \quad \text{soit : } \vec{P} = -mg\vec{k}$$

$$\overrightarrow{AB} \begin{cases} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{cases} \quad \text{soit : } \overrightarrow{AB} = (x_B - x_A) \cdot \vec{i} + (y_B - y_A) \cdot \vec{j} + (z_B - z_A) \cdot \vec{k}$$

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{P}) = \vec{P} \cdot \overrightarrow{AB} = P_x \cdot (x_B - x_A) + P_z \cdot (z_B - z_A) = -m \cdot g(z_B - z_A)$$

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{P}) = m \cdot g(z_A - z_B)$$

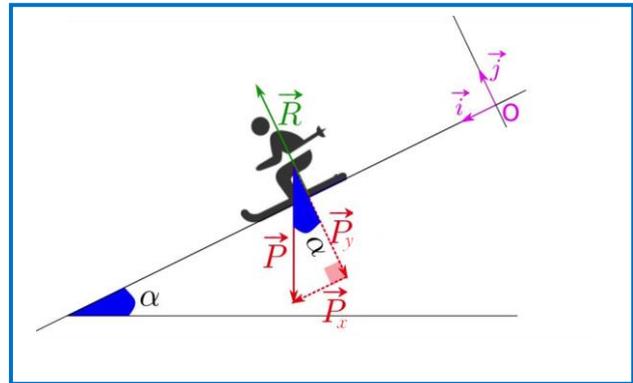
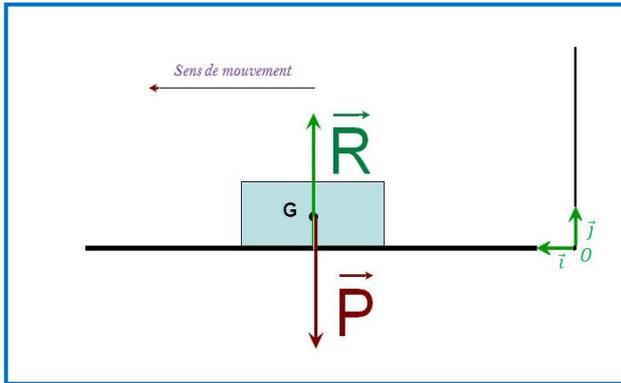
Remarque :

- *) Le travail du poids ne dépend pas du chemin suivi mais uniquement de l'altitude initiale et de l'altitude finale ; on dit que le poids est une force conservatrice.
- *) Si le corps descend, alors $z_A - z_B > 0 \Rightarrow W_{A \rightarrow B}(\vec{P}) > 0$; le travail du poids est moteur.
- *) Si le corps monte, alors $z_A - z_B < 0 \Rightarrow W_{A \rightarrow B}(\vec{P}) < 0$; le travail du poids est résistant.
- *) Si le corps reste à la même altitude ; $z_A - z_B = 0 \Rightarrow W_{A \rightarrow B}(\vec{P}) = 0$ le travail du poids est nul.

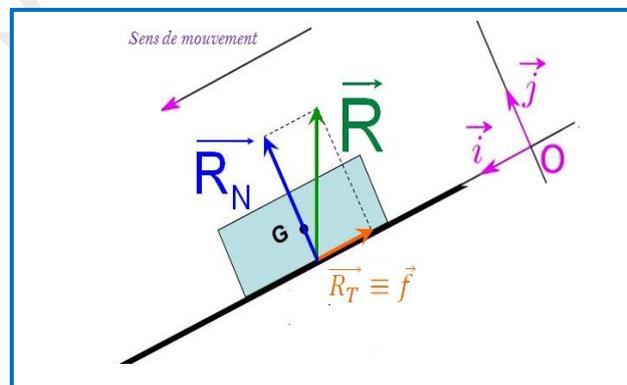
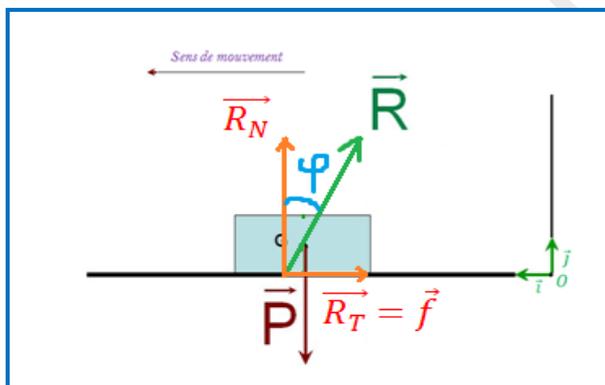
4) Travail de la réaction (la résultante) \vec{R} :

La réaction \vec{R} est la force exercée par un plan (horizontal, vertical ou incliné) sur un corps situé sur ce plan;

1^{er} cas : Mouvement sans frottement : \vec{R} est normale au plan.



2^{ème} cas : Mouvement avec frottement : \vec{R} n'est pas perpendiculaire au plan.



✓ $\vec{R} = \vec{R}_N + \vec{R}_T$ avec :

- \vec{R}_N : la composante normale ;
- \vec{R}_T : la composante tangentielle, notée aussi \vec{f} (responsable aux frottements).
- $R = \sqrt{R_n^2 + f^2}$

✓ $K = \tan\varphi = \frac{f}{R_N}$: le coefficient du frottement ;

✓ φ : l'angle de frottement.

Rappel : Principe d'inertie

Lorsqu' un corps solide est *isolé* (ne soumet à aucune force) ou *pseudo-isolé* ($\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$) mécaniquement dans un repère Galiléen, le vecteur vitesse du centre d'inertie G du corps solide est constant :

$$\vec{V}_G = \vec{Cte} ;$$

deux cas se présentent :

- Si le corps est *au repos*, il restera au repos : $\vec{V}_G = \vec{0}$,
- Si le corps est *en mouvement*, alors le mouvement de son centre d'inertie G est rectiligne uniforme.

➤ **En particulier :**

Si le mouvement du centre d'inertie G d'un corps est rectiligne uniforme alors le corps solide est *isolé* (ne soumet à aucune force) ou *pseudo-isolé* ($\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$) mécaniquement.

Application n° ② : Exercice n° ② ; Série n° ②

Un skieur de masse $m = 75\text{kg}$ (avec tout le matériel) descend une piste rectiligne inclinée d'un angle $\alpha = 14^\circ$ avec l'horizontale à une vitesse constante. Les forces de frottements de la piste sur le skieur ainsi que celle de l'air ont une résultante \vec{f} parallèle à la pente. On donne : $g = 10\text{N.kg}^{-1}$

- 1- Faire l'inventaire des forces agissant sur le skieur.
- 2- Calculer la valeur des forces de frottements.
- 3- Quel est le travail de cette force lorsque le skieur parcourt une distance de 250m dans ces conditions ?
- 4- Quel est le travail du poids du skieur pour ce même parcours ?
- 5- Que vaut, dans ce cas, la somme des travaux de toutes les forces s'exerçant sur le skieur ?

Réponse :

Application n° ③ : Exercice n° ③ ; Série n° ②

Une voiture de masse 1,5t roule à une vitesse constante V sur un sol horizontal.

1- Faites le bilan des forces qu'elle subit et précisez quelles forces font un travail moteur, un travail résistant et celle qui font un travail nul.

2- La force de frottement vaut 1800 N. Calculez le travail du poids et de la force motrice sur un trajet de 10km.

Reprenez l'exercice en supposant que la voiture monte un col avec une pente de 10%.

Réponse :

Application n° ④ : Exercice n° ④ ; Série n° ②

Une automobile de masse 1100kg roule à vitesse constante sur un tronçon rectiligne de 2km , puis monte une pente de 8% pendant 1500m . On supposera que les forces de frottement qui s'opposent au déplacement gardent une valeur constante de 1850N tout au long du trajet.

- 1- Calculez le travail du poids sur le trajet complet.
- 2- Calculez le travail de la force de frottement sur le trajet complet

Réponse :

II- Puissance d'une force:

Définition :

On définit la puissance \mathcal{P} d'une force \vec{F} par :

$$\mathcal{P} = \frac{W}{\Delta t} \quad (W \equiv J \cdot s^{-1})$$

Avec :

W : Travail de la force \vec{F} exprimé en **Joule (J)** ;

Δt : Durée nécessaire pour réaliser ce travail exprimée en **seconde (s)** .

Remarque :

➤ L'unité de la puissance dans le système international des unités (SI) est le **Watt (W)**

➤ On a : $\mathcal{P} = \frac{W}{\Delta t}$

et on sait que : $W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \overline{AB}$

Donc : $\mathcal{P} = \frac{\vec{F} \cdot \overline{AB}}{\Delta t} = \vec{F} \cdot \frac{\overline{AB}}{\Delta t}$

Et comme : $\vec{V} = \frac{\overline{AB}}{\Delta t}$

Alors : $\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{V}$

$\Rightarrow \mathcal{P} = F \cdot V \cdot \cos(\alpha)$

Avec : $\alpha = (\vec{F} \cdot \vec{V})$: l'angle entre les vecteurs \vec{F} et \vec{V} .

➤ La puissance d'une force est une grandeur **algébrique** (positive ou négative).

Application n°(5) : Exercice n° (5) ; Série n° (2)

Soit un skieur tracté par une perche faisant un angle $\beta = 22^\circ$ avec la pente . Le skieur s'élève d'un point A vers un point B distant de 350m . La piste est supposée plane et faisant un angle $\alpha = 25^\circ$ avec l'horizontale . Le poids du skieur est de 750N et il avance à vitesse constante de 7,2km/h . La force \vec{F} exercée par la perche sur le skieur est 370N . La piste exerce sur le skieur une force de frottement constante noté \vec{f} d'intensité 25,71N .

- 1) Exprimer , en fonction de la norme du vecteur considéré , le travail de toutes les forces s'exerçant sur le skieur .
- 2) Calculer ces travaux .
- 3) Calculer la puissance $\mathcal{P}_{\vec{F}}$ de la force exercée par la perche .
- 4) Pourquoi le skieur peut-il être considéré comme pseudo-isolé ? .

Réponse :

II- Puissance et travail d'une force de moment constant exercée sur un solide en rotation autour d'un axe fixe:

Rappel : Le moment d'une force \vec{F} par rapport à l'axe de rotation (Δ) est défini par :

$$\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F}) = \pm F \cdot d$$

↑ ↑ ↑
(N.m) (N) (m)

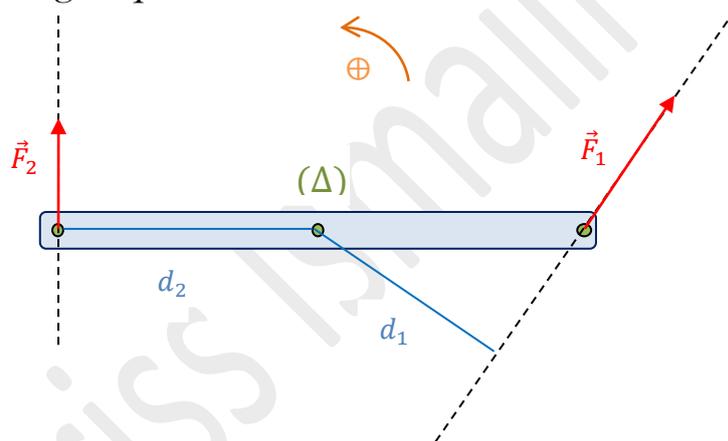
Avec :

F : l'intensité de la force \vec{F} ;

d : la distance entre l'axe (Δ) et la projection orthogonale sur la ligne d'action de la force \vec{F} .

Exemple :

On considère le montage expérimental suivant :



On a :

$$\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F}_1) = +F_1 \cdot d_1$$

$$\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F}_2) = -F_2 \cdot d_2$$

$$\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{P}) = 0$$

$$\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{R}) = 0$$

Remarque :

- Le moment de la force \vec{R} appliquée par l'axe de rotation (Δ) est toujours nul ($\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{R}) = 0$), car la ligne d'action de la force \vec{R} coupe l'axe de rotation (Δ) .
- Le moment du poids \vec{P} est nul ($\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{P}) = 0$) si l'axe de rotation (Δ) passe par le centre d'inertie G du corps solide en rotation.

5) Puissance d'une force de moment constant :

On sait que : $\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{V}$

$$\Rightarrow \mathcal{P} = F \cdot V \cdot \cos(0) = F \cdot V$$

Et comme : $V = R \cdot \omega$

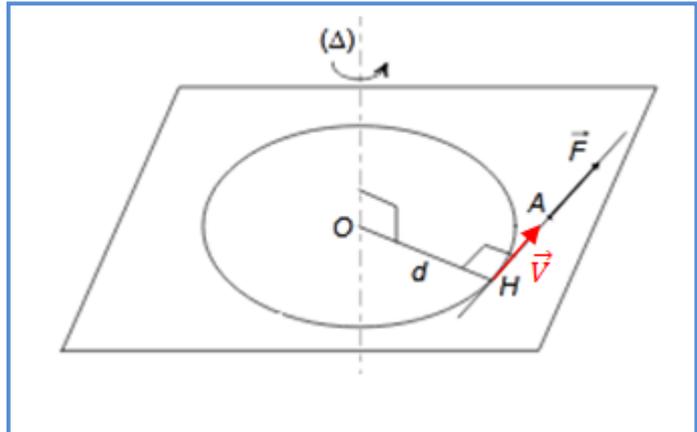
$$\text{Alors : } \mathcal{P} = F \cdot R \cdot \omega$$

D'autre part,

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = +F \cdot d = +F \cdot R$$

D'où :

$$\mathcal{P} = \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) \cdot \omega$$



6) Travail d'une force de moment constant :

On sait que : $\mathcal{P} = \frac{W}{\Delta t}$

$$\Rightarrow W = \mathcal{P} \cdot \Delta t$$

Et comme : $\mathcal{P} = \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) \cdot \omega$

$$\text{Alors : } W = \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) \cdot \omega \cdot \Delta t$$

Et on sait que : $\omega = \frac{\Delta \theta}{\Delta t}$

$$\Rightarrow \Delta \theta = \omega \cdot \Delta t$$

$$\text{D'où : } W = \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) \cdot \Delta \theta$$

Application n° ⑥ : Exercice n° ⑥ ; Série n° 2

On soulève un corps solide (S) de masse $m = 2\text{kg}$ à vitesse constante $v = 2\text{m/s}$ à l'aide du dispositif ci-contre et qui est constitué de :

* Poulie à deux gorge de rayon $R = 10\text{cm}$, $r = 4\text{cm}$

* f_1 et f_2 deux fils enroulés chacun sur une gorge, les frottements étant négligeables .

- 1) Calculer l'intensité de la force \vec{F}_1 exercée par le fil f_1 .
- 2) Calculer les travaux et les puissances des deux forces \vec{F}_1 et \vec{F}_2 lorsque la poulie fait un tour complet .

