Mouvement de rotation d'un solide indéformable autour d'un axe fixe

I- Mouvement de rotation autour d'un axe fixe:

1) Définition :

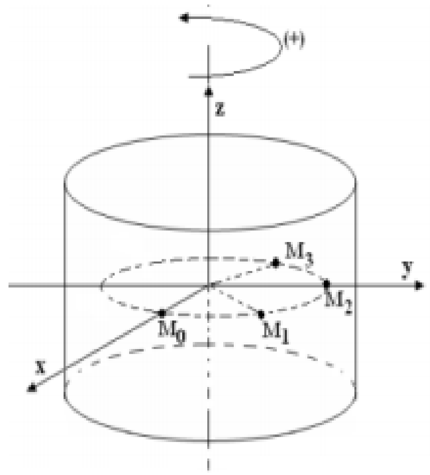
Un solide possède un mouvement de rotation autour d'un axe fixe (Δ) si :
Tous les points du solide décrivent des trajectoires circulaires centrées sur l'axe de rotation, sauf les points qui appartiennent à cet axe.

Exemples :

On trouve beaucoup des exemples dans la vie courante :
La porte ; Roue de bicyclette ; Aiguilles d'une montre ; ……

2) Repérage d'un point du solide :

Pour repérer la position d'un point M d'un corps solide (S), en rotation autour d'un axe fixe, on choisit :



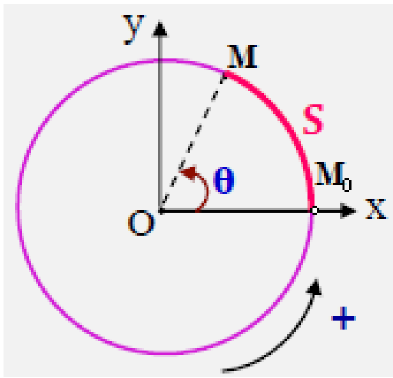
- ✓ *Un repère orthonormé $R(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ tel que le vecteur $\vec{k}$ est confondu avec l'axe de rotation (Δ).*
- ✓ *La trajectoire du point M contenue dans le plan $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.*

Nous pouvons repérer la position du point M à chaque instant en utilisant l'abscisse angulaire θ ou l'abscisse curviligne S.

a- L'abscisse angulaire θ:

L'abscisse angulaire du point M du solide en rotation autour d'un axe fixe (Δ) est l'angle orienté θ tel que :

$$\boxed{\theta = (\widehat{\overrightarrow{OM_0},\overrightarrow{OM}})} \quad (rad)$$



$\Longrightarrow$ Au cours du mouvement du point M, l'abscisse angulaire varie en fonction du temps. On appelle l'équation $\theta(t)$: équation horaire du mouvement

b- L'abscisse curviligne S :

L'abscisse curviligne du point M du solide en rotation autour d'un axe fixe (Δ) est l'arc orienté S tel que :

$$\boxed{S = \widehat{M_0M}} \quad (m)$$

$\Longrightarrow$ Au cours du mouvement du point M, l'abscisse curviligne varie en fonction du temps. On appelle l'équation $S(t)$: équation horaire du mouvement en fonction de l'abscisse curviligne

Remarque : Relation entre S et θ

$$\boxed{S = r.\theta} \quad (m)$$

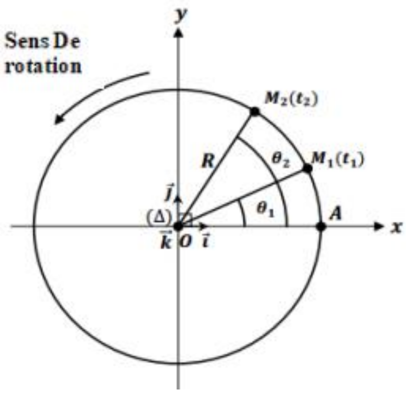
(m) (rad)

Avec :
r : le rayon de la trajectoire circulaire.

II- Vitesse angulaire ω :

1) Vitesse angulaire moyenne :

On appelle vitesse angulaire moyenne ω_{moy} du point M entre les instants t_1 et t_2 la grandeur :



$$\boxed{\omega_{moy} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1}} \quad (rad/s)$$

2) Vitesse angulaire instantanée :

On appelle vitesse angulaire instantanée ω_i du point M à l'instant t_i la grandeur :

$$\boxed{\omega_i = \frac{\delta\theta}{\delta t} = \frac{\theta_{i+1} - \theta_{i-1}}{t_{i+1} - t_{i-1}}} \quad (rad/s)$$

Remarque :

***) Vitesse linéaire instantanée :**

On définit la vitesse linéaire instantanée à l'instant t_i par la relation :

$$\boxed{V_i = \frac{\delta S}{\delta t} = \frac{S_{i+1} - S_{i-1}}{t_{i+1} - t_{i-1}} = \frac{\widehat{M_{i-1}M_{i+1}}}{t_{i+1} - t_{i-1}} \approx \frac{\overline{M_{i-1}M_{i+1}}}{t_{i+1} - t_{i-1}}} \quad (m/s)$$

***) Relation entre vitesse linéaire V et vitesse angulaire ω :**

$$\boxed{V = \underset{(m)}{r} . \underset{(rad/s)}{\omega}} \quad (m/s)$$

Application n° 1 : Exercice n° 1 ; Série n° 1

Le tambour d'une machine à laver est un cylindre de $46\ \text{cm}$ *de diamètre. Au moment de l'essorage, il tourne autour de son axe à* $800\ tr/min$.

1- *Calculer sa vitesse angulaire ω de rotation en tr/s puis en rad/s.*
2- *Calculer la vitesse V d'un point A de la périphérie du tambour.*

Réponse :

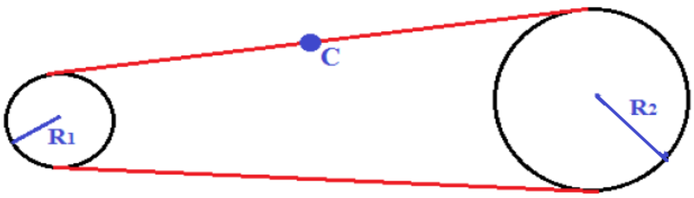
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Application n°2 : Exercice n° 2 ; Série n°1

On considère un système de deux poulies reliées par une courroie. La première poulie a un rayon $R_1 = 5cm$ *et tourne à une vitesse angulaire constante* $\omega_0 = 180\ rad.s^{-1}$. *La seconde a un rayon* $R_2 = 30cm$.

1- *La courroie porte une marque* C. *Calculer la vitesse de translation du point* C *au cours du mouvement.*
2- *Calculer la distance parcoure par C pendant une durée de 30 s.*
3- *Calculer la vitesse angulaire* ω_2 *de la seconde poulie.*



Répons

III- Mouvement de rotation uniforme:

1) Définition:

le mouvement de rotation d'un solide autour d'un axe fixe (Δ) *est dit uniforme si sa vitesse angulaire* ω *de ce mouvement reste inchangée au cours du temps* $\omega = cte$.

Remarque :

- ✓ *Tous les points du solide ont la même vitesse angulaire, mais leurs vitesse linéaire augmentent lorsqu'on s'éloigne de l'axe de rotation.*
- ✓ *On exprime l'angle de rotation* $\Delta\theta$ *pendent la durée* Δt *par la relation :*

$$\Delta\theta = \omega.\Delta t$$

2) Caractéristiques du mouvement de rotation uniforme:

a) La période T :

La période T est la durée nécessaire pour qu'un point M du solide effectue un tour.
Elle exprime par la relation : $\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}$ (s)

En effet :

$\Delta\theta = \omega.\Delta t$, lorsque $\Delta t = T$, $\Delta\theta = 2\pi$

Donc : $2\pi = \omega.T$ d'où : $T = \frac{2\pi}{\omega}$

b) La fréquence f (ou N):

La fréquence f est le nombre de tour effectué par le point M en une seconde.
Elle exprime par la relation : $\boxed{f = \frac{1}{T}}$ (Hz)

Soit aussi : $\boxed{f = \frac{\omega}{2\pi}}$

3) Equation horaire du mouvement :

On appelle équation horaire du mouvement la fonction $\theta = f(t)$ exprimée par :

$$\boxed{\theta(t) = \omega.t + \theta_0} \quad (rad)$$

Avec :

ω : la vitesse angulaire du solide en (rad/s).

θ_0 : l'abscisse angulaire à l'origine des dates $(t_0 = 0)$ en (rad)

Remarque :

On peut établir une autre forme de l'équation horaire du mouvement en fonction de l'abscisse curviligne $S(t)$:

$$\boxed{S(t) = V.t + S_0} \quad (m)$$

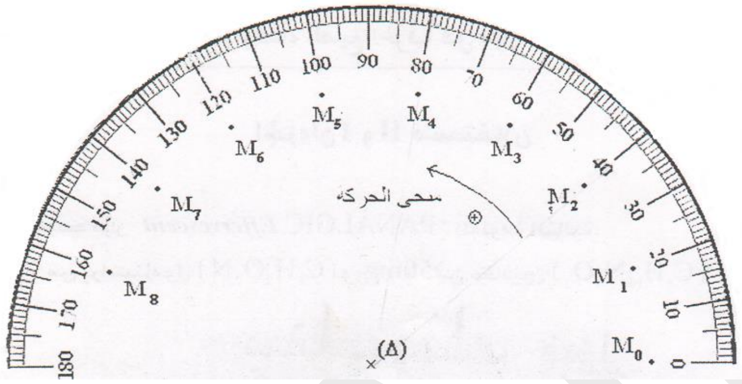
Avec :

V : la vitesse linéaire instantanée d'un point M du solide, en (m/s).

$S_0 = r.\theta_0$: l'abscisse curviligne à l'origine des dates ($t_0 = 0$), en (m)

Application n°3 : Exercice n° 3 ; Série n°1

La figure ci-dessous représente le mouvement d'un point M, appartient à une tige (T) en rotation autour d'un axe fixe (Δ), à des intervalles de temps successifs et égaux à $\tau = 40ms$



1- En utilisant la méthode d'encadrement ; $\omega_i = \frac{\theta_{i+1}-\theta_{i-1}}{2\tau}$ pour déterminer la vitesse angulaire ω_i à l'instant t_i, déterminer la vitesse angulaire ω_i du point M aux instants t_1, t_3 et t_5.

2- Quelle est la nature du mouvement de la tige (T) ? justifier.

3- Quelle est la nature du mouvement du point M ?

4- Déduire la vitesse linéaire V du point M.

5- Calculer la période T et la fréquence N du mouvement du point M.

6- Déterminer la durée nécessaire pour que la tige faire cinq tours complètes.

7- Déterminer l'équation horaire $\theta = f(t)$ du mouvement ;

7.1- Si on choisit comme origine des abscisses ($\theta = 0$) la position M_0 et comme origine des dates ($t = 0$) l'instant d'enregistrement du point M_0.

7.2- Si on choisit comme origine des abscisses ($\theta = 0$) la position M_0 et comme origine des dates ($t = 0$) l'instant d'enregistrement du point M_2.

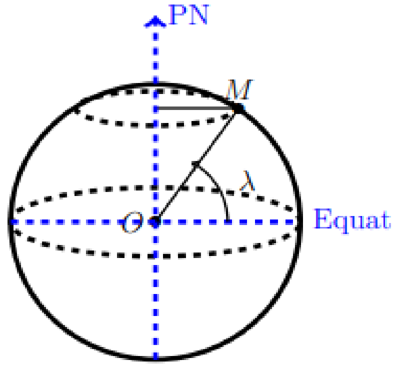
7.3- Si on choisit comme origine des abscisses ($\theta = 0$) la position M_1 et comme origine des dates ($t = 0$) l'instant d'enregistrement du point M_2.

8- Déduire l'équation horaire $S = f(t)$ du mouvement dans le cas de la question 6.2- .

Réponse :

Application n°4 : Exercice n° 4 ; Série n°1

La Terre, assimilée à une sphère de rayon $R = 6380km$, *tourne autour d'un axe passant par ses pôles en un jour sidéral, c'est-à-dire en* $23h56min4s$.



1- *Déduire la période de rotation de la Terre autour de l'axe de ses pôles, dans le référentiel géocentrique*
2- *Déterminer la vitesse angulaire de la Terre.*
3- *Calculer, dans le référentiel géocentrique, les vitesses* V_1, V_2 *et* V_3 *des points respectivement situés à l'équateur, à Rabat (latitude* $34°$ *), et à Safi (latitude* $32°$ *).*

Remarque : *La latitude du point M égale à la valeur de l'angle .*

4- *Le satellite géostationnaire [Météosat](), assimilable à un point matériel, est situé à la distance de* $42200\ km$ *du centre de la Terre dans le plan équatorial. Ce satellite est fixe dans un référentiel terrestre on dit que ce satellite est géostationnaire.*
   a) *Décrire son mouvement dans le référentiel géocentrique.*
   b) *Déterminer sa vitesse angulaire* ω *dans le référentiel géocentrique.*
   c) *Calculer sa vitesse dans le référentiel géocentrique.*
5- *Le satellite Spot II décrit une trajectoire circulaire à une altitude de* $830\ km$, *à la vitesse constante de* $7550\ m/s$ *dans le référentiel géocentrique.*

Calculer sa période de rotation. Ce satellite est-il géostationnaire ?

Réponse :

Application n°6 : Exercice n° 6 ; Série n°1

Une montre possède 3 *aiguilles dont les longueurs sont :*

- $\ell_h = 9cm$ *pour celle des heures ;*
- $\ell_m = 12cm$ *pour celle des minutes ;*
- $\ell_s = 14cm$ *pour celle des secondes.*

1- *Déterminer la vitesse angulaire de rotation de chaque aiguille.*

2- *Déterminer la valeur de la vitesse de l'extrémité de chaque aiguille.*

3- *On choisit l'origine des dates à midi. A quel instant l'aiguille des heures et celle des minutes se superposent-elles à nouveau ?*

Réponse :