➪ *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$(\forall x \in \mathbb{R});\ f(x) = x^3 - 3x - 3.$$

1)- a)- *Dresser le tableau de variation complet de f.*

b)- *Déterminer $f([1;+\infty[)$ et $f(]-\infty;1])$.*

2)- *Montrer que l'équation : $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.*

3)- *On pose $a = \dfrac{\sqrt[3]{12+4\sqrt{5}}}{2}$. Prouver que : $\alpha = a + \dfrac{1}{a}$.*

4)- *Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation (E) : $\operatorname{Arctan}\left(\sqrt{\tan^3 x - 3\tan x}\right) = \dfrac{\pi}{3}$.*

التمرين الرابع

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

بمايلي : $f(x) = \sin x$

1) بين أن f تقابل من I نحو مجال J يتم تحديده

وليكن f^{-1} تقابله العكسي

2) بين أن :

$$(\forall x \in \left]-1,1\right[) \quad f^{-1}(x) = \frac{\pi}{2} - 2\arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

التمرين الأول :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي :
$$\begin{cases} f(x) = \sqrt[3]{1-x} + x - 1 & ; \quad x < 0 \\ f(x) = \arctan\left(\sqrt[3]{x} + \tan x\right) & ; \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\end{cases}$$

1) أ) بين أن الدالة f متصلة في النقطة $a = 0$ 0.5 ن

ب) أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على يمين $a = 0$ و أول هندسيا النتيجة 1 ن

ج) أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على يسار النقطة $a = 0$ و أول النتيجة هندسيا 1 ن

2) أحسب النهايتين $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$ ثم أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C) عند $-\infty$ 1.5 ن

3) بين أن الدالة f تزايدية قطعا على $\left]-\infty, \frac{\pi}{2}\right[$ 1 ن

4) لتكن g الدالة المعرفة على $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ المعرفة بما يلي : $x \neq \frac{\pi}{2} \quad ; \quad g(x) = f(x)$ و $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$

أ) بين أن $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} \frac{1}{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\tan x} = -1$ و استنتج أن g قابلة للاشتقاق على يسار النقطة $\frac{\pi}{2}$ 1.5 ن

ب) بين أن g تقابل من I نحو I 0.5 ن

5) أ) حل المعادلة $g^{-1}(x) = x$ و بين أن $g^{-1}(x) \leq x$ $\left(\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\right)$ 1 ن

ب) أرسم المنحنيين (C) و $\left(C_{g^{-1}}\right)$ 1.5 ن

Exercice 01 : (03pts)

1
2

➩ On considère les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$a_n = \left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{1+k^2}\right) - \arctan(n+1) \text{ et } b_n = \left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{1+k^2}\right) - \arctan(n).$$

1)- Soit $k \in \mathbb{N}$. En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que :

$$\arctan(k+1) - \arctan(k) < \frac{1}{1+k^2} < \arctan(k) - \arctan(k-1).$$

2)- Montrer que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

○ Exercice n°03 : (3,5 pts)

✓ On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \arctan(x-1) + \arctan x + \arctan(x+1) .$$

1,25 **6.** Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans un intervalle J que l'on déterminera .

1,25 **7.** En déduire que l'équation $(E) : f(x) = \frac{\pi}{2}$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$ et que $\alpha \in]0,1[$.

1 **8.** Donner la valeur précise de α .

○ Exercice n°01 : (1,5 pts)

✓ On considère la fonction : $f : x \mapsto \dfrac{1}{2\left(1-\sqrt{x}\right)} - \dfrac{1}{3\left(1-\sqrt[3]{x}\right)}$.

1,5 **1.** Déterminer $\mathcal{D}_f$, puis montrer que f admet en $x_0 = 1$ un prolongement par continuité g que l'on déterminera .

○ Exercice n°02 : (03 pts)

✓ Soit f la fonction définie sur $I = \left[0, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right[$ par :

$$f(x) = \tan\left(\pi\sqrt{1-x^2}\right) .$$

1 **2.** Calculer $\lim\limits_{x \to \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^-} f(x)$, puis montrer que f est continue sur I .

1 **3.** Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera .

1 **4.** Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

Exercice n°04 :

➩ *Soit* f *une fonction continue sur* $[0,1]$ *tels que :*

$$(\forall x \in [0;1]) ; f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) = 3.f(x).$$

✓ *Montrer que :* $(\forall x \in [0;1]) ; f(x) = 0$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{2\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}-3}{\sqrt[3]{x}+2\sqrt{x}-3}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\arctan\left(\sqrt[3]{x}-1\right)}{\sqrt{2-x}-1}$$

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$(E_1):\ \sqrt[3]{x^2}-3\sqrt[3]{x(x-1)}+2\sqrt[3]{(x-1)^2}=0$$

2) calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{E(ax)}{x}$ puis déduire la limite $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{E(2x)+E(-3x)+E(6x)}{E(x)+E(5x)+E(6x)}$

3) a) montrer que $\left(\forall(a,b)\in\mathbb{R}^{+2}\right)$ $\arctan a-\arctan b=\arctan\dfrac{a-b}{1+ab}$

b) calculer la limite $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^3}\left(\arctan\sqrt{2+x}-\arctan\sqrt{x}\right)$

Suites numériques

Exercice (1)

On considère la suite $(U_n)_{n\geq1}$ définie par : $U_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^2}$

a) Montrer que $(\forall k \geq 2)$ $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)}$

b) déduire que $(U_n)_{n\geq1}$ est majorée

Exercice (2)

Soit $(U_n)_{n\geq1}$ la suite telle que : $U_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{n+k}$

1) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $U_n \geq \frac{1}{2}$

2) étudier la monotonie de la suite $(U_n)_{n\geq1}$

3) montrer que $(U_n)_{n\geq1}$ est convergente

Exercice (3)

On considère la suite $(x_n)_n$ définie par : $x_0 = 1$ et $x_{+1} = \sqrt[3]{1+\frac{1}{2}x_n^3}$

1) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$ $0 < x_n < 2$

2) montrer que $(x_n)_n$ est croissante puis qu'elle est convergente

3) on pose $U_n = x_n^3 - 2$ pour tout entier naturel n

montrer que $(U_n)_n$ est géométrique et calculer $\lim_{n\to+\infty} x_n$