EXERCICE 33

Montrer que pour tout entier naturel n,
$u_n = 3.5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ est divisible par 17

EXERCICE 34

1. - Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$
   - Trouver une démonstration directe
2. - Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

   $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$$

   - Trouver une démonstration directe

$\boxed{1}$ - Montrer que pour tout $x \geqslant 9$, on a : $2\sqrt{x-9} < x$

$\boxed{2}$ - Résoudre l'équation : $\sqrt{x-9} + \sqrt{x-24} < x$ dans $\mathbb{R}$

Soient a; b; x et y quatre reels non nuls.

Montrer que : $\frac{1}{x^2+y^2} > a^2+b^2 \Rightarrow ax+by \neq 1$

4pts

Exercice 3 : Démontrer que :

i/ $\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2 ; x \neq 1$ et $y \neq 3 \Rightarrow xy + 3 \neq y + 3x$ (par contraposée)

ii/ En utilisant un raisonnement par l'absurde, montrer qu'il n'existe aucun triangle rectangle tel que les longueurs de ses côtés $4a ; 5a$ et $6a$ avec $a > 0$

Soit $A; B$ et C des parties d'un ensemble E

Montrer que

1) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ et $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
2) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap B)$
3) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup B)$
4) $A \subset B \Leftrightarrow (A \cup B) = B$
5) $A \subset B \Leftrightarrow (A \cap B) = A$
6) $A \subset B \Leftrightarrow (A \cap \overline{B}) = \varnothing$
7) $A \subset B \Leftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$
8) $A \cup B = A \cap C \quad \Leftrightarrow \quad B \subset A \subset C$
9) $(A \cap B) \cap \left(\overline{A \cap C}\right) = A \cap B \cap \overline{C}$
9) $(A \cap C) \cap \left(\overline{A \cap B}\right) = A \cap C \cap \overline{B}$

On considère l'ensemble

$$A = \left\{ x, y \in \mathbb{R}^{*^2} \,/\, \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{xy} \right\}$$

1) Detemontrer: $0 \notin A$ et $\frac{1}{2} \in A$

2)Montrer que $A \subset \left]0;1\right[$

1) Ecrire la négation des propositions suivantes :

$P : (\forall x \in \mathbb{R}); \ (x^2 \in \mathbb{Q} \Rightarrow x \in \mathbb{Q})$

$Q : (\forall y \in \mathbb{R})(\exists x \in \mathbb{R}) : 2x + 3y < 1$

$R : (\exists n \in \mathbb{Z}) \ : \ n - 1 < \frac{n}{n-1} \leq n$

2) Etudier la vérité des propositions P , Q et R.

Exercice 2 (3 points)

1) Montrer que : $\left(\forall x \in \left]-\infty; -2\right[\right)\left(\forall y \in \left]-\infty; -2\right[\right) : x + y + xy > 0$

2) Montrer que :$\left(\forall x \in \left]-\infty; -2\right[\right)\left(\forall y \in \left]-\infty; -2\right[\right) : x \neq y \Rightarrow \frac{x+1}{x^2+2x+2} \neq \frac{y+1}{y^2+2y+2}$

Exercice 3 (5 points)

Les questions Sont indépendantes. Montrer que :

1) $(\forall x \geq 1)(\forall y \geq 4) : \sqrt{x-1} + 2\sqrt{y-4} = \frac{x+y}{2} \Leftrightarrow x = 2 \ \ et \ \ y = 8$

2) $(\forall x \in \mathbb{R}) \ : \ 2\sqrt{x^2+1} + x + 2 > 0$

3) $(\forall n \in \mathbb{N}) : \quad \sqrt{16n^2 + 8n + 3} \notin \mathbb{N}$

Exercice 4 (6 points)

En utilisant le raisonnement par récurrence, montrer que :

1) $(\forall n \in \mathbb{N}) : \ \ 7/2^{n+2} + 3^{2n+1}$

2) $(\forall n \in \mathbb{N}) : \ \ \sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k(2k+1) = (-1)^n(n+1)$

3) $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : \ \ \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$

Exercice 10 :

Montrer par récurrence que :

1. $1 \times 2 + 2 \times 3 + \cdots + n(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$
2. $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$
3. $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
4. $(\forall n \geq 3)$: $3^n \geq n^3$
5. $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $5^n \leq 4^n + n5^{n-1}$
6. $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; 17 divise $3 \times 5^{2n-1} + 2^{3n-2}$

Barème	Exercice 1
(8pt)	1) On considère la proposition (P) suivante : $(\forall x \in \mathbb{R}); (x^2 = 2x \Rightarrow x = 2)$
0,5	a) Donner la négation de (P)
0,5	b) En déduire la valeur de vérité de (P)
1	2) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'entier $n(n+1)(n+2)$ est multiple de 3
0.5	b) En déduire que l'entier $n^3 - n$ est multiple de 3 pour tout $n \in IN^*$
0 ,5	3) a) Démonter que : $(\forall a; b \in \mathbb{R}^+); (a + b = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ et } b = 0)$
1p	b) Montrer que : $(\forall x. y \in \mathbb{R}): (x \neq 9 \text{ ou } y \neq 9 \Rightarrow \frac{x+y+18}{6} \neq \sqrt{x} + \sqrt{y})$
1p	4) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
1p	b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : 6 divise $n(n+1)(2n+1)$
1	5) a) Montrer que : $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2{}_+ ; a + b \geq 2\sqrt{ab}$
1	b) En déduire que : $\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3{}_+ ; (a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$
(3pt)	**Exercice 2**
	On pose $A = \left\{ n \in \mathbb{N} \ / \ \frac{4n^2 - 4n + 10}{2n - 1} \in \mathbb{Z} \right\}$ et $B = \left\{ n \in \mathbb{N} \ / \ \frac{n+10}{n-5} \in \mathbb{Z} \right\}$
0.5	1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}/\{5\}$; $\frac{n+10}{n-5} = 1 + \frac{15}{n-5}$
0 ,5	2) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $\frac{4n^2 - 4n + 10}{2n - 1} = 2n - 1 + \frac{9}{2n-1}$
2	3) Déterminer en extension A ; B et $A \triangle B$
(4,5pt)	**Exercice 3**
	Soient A ; B et C des parties d'un ensemble E
1	1) Montrer que $\left((\overline{A \cap B}) \cap (\overline{A \cap C}) \right) \cup A = E$
1	1) Montrer que : $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$
1,5	2) Montrer que $A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C} \Leftrightarrow A \cap B = A \cap C$