Travail et puissance d'une force

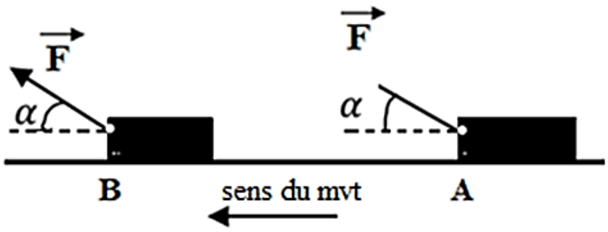
I. Travail d'une force ou d'un ensemble de forces :

1. Travail d'une force constante exercée sur un corps solide en translation :

Une force $\vec{F}$ est dite constante si elle conserve la même direction, le même sens, et la même intensité.

a. Translation rectiligne :

On considère un corps solide en translation rectiligne, on appelle travail de la force $\vec{F}$ dont le point d'application se déplace d'une position initiale A à une position finale B, le produit scalaire du vecteur force $\vec{F}$ et de vecteur de déplacement $\overrightarrow{AB}$.

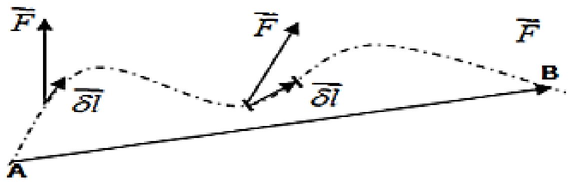


$$W_{A\to B}(\vec{F}) = \vec{F}.\overrightarrow{AB}$$
$$W_{A\to B}(\vec{F}) = F.AB.\cos\alpha$$

Dans le système international des unités, le travail est exprimé en Joule, noté (J).

b. Translation curviligne :

On décompose ce déplacement, non rectiligne, en une succession de déplacements suffisamment petits pour être considérés comme rectilignes.



$$\overrightarrow{\delta\ell_1} + \overrightarrow{\delta\ell_2} + \overrightarrow{\delta\ell_3} + \ldots + \overrightarrow{\delta\ell_n} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{\delta\ell_i} = \overrightarrow{AB}$$

Le travail élémentaire d'une force constante est :

$$\delta W_i(\vec{F}) = \vec{F}.\overrightarrow{\delta\ell_i}$$

Le travail de la force est égal à la somme des travaux élémentaires :

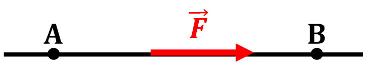
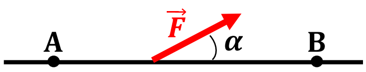
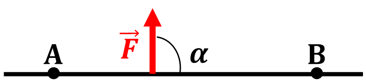
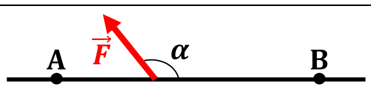
$$W_{A\to B}(\vec{F}) = \sum_{i=1}^{n} \delta W_i(\vec{F}) = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}.\overrightarrow{\delta\ell_i} = \vec{F}.\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{\delta\ell_i} = \vec{F}.\overrightarrow{AB}$$

Le travail d'une force constante ne dépend pas de la trajectoire de son point d'application, il ne dépend que de sa position initiale et de sa position finale : $W_{A\to B}(\vec{F}) = \vec{F}.\overrightarrow{AB}$

c. Travail moteur, travail résistant :

Le travail est une grandeur algébrique, il peut être positif ou négatif.

L'expression $W_{A\to B}(\vec{F}) = F.AB.\cos\alpha$ montre que son signe dépend du signe de $\cos\alpha$:

$\alpha = 0°$ $\cos(\alpha) = 1$		$W_{A\to B}(\vec{F}) = F.AB > 0$	Le travail est moteur
$0 \le \alpha < 90°$ $\cos(\alpha) > 0$		$W_{A\to B}(\vec{F}) = F.AB.\cos\alpha > 0$	
$\alpha = 90°$ $\cos(\alpha) = 0$		$W_{A\to B}(\vec{F}) = 0$	La force ne travaille pas
$90° < \alpha \le 180°$ $\cos(\alpha) < 0$		$W_{A\to B}(\vec{F}) = F.AB.\cos\alpha < 0$	Le travail est résistant
$\alpha = 180°$ $\cos(\alpha) = -1$		$W_{A\to B}(\vec{F}) = -F.AB < 0$	

- Pour $0 \le \alpha < 90° \Rightarrow \cos(\alpha) > 0$; Le travail est positif. Dans ce cas la force $\vec{F}$ est dite **motrice** et le travail est dit **moteur.**

- Pour $90° < \alpha \leq 180° \Rightarrow \cos(\alpha) < 0$; Le travail est positif. Dans ce cas la force $\vec{F}$ est dite **résistante** et le travail est dit **résistant.**
- Pour $\alpha = 90° \Rightarrow \cos(\alpha) = 0$, le travail est **nul**. Dans ce cas la force $\vec{F}$ **ne travaille pas**.

2. Travail d'un ensemble de forces constantes exercées sur un corps solide en translation :

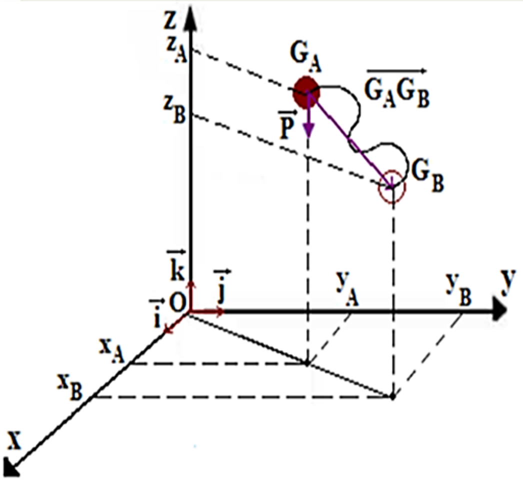
On considère un corps solide soumis à deux forces constantes $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$, dont les points d'applications déplacent successivement de A_1 à B_1 et de A_2 à B_2 , et puisque le solide est en translation $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{A_2B_2}$. Le travail fourni par les deux forces $\overrightarrow{F_1}$ ***et*** $\overrightarrow{F_2}$ au cours de ce déplacement est donné par la relation :

$$W_{A\to B}(\vec{F_1},\vec{F_2}) = \vec{F_1}.\overrightarrow{AB} + \vec{F_2}.\overrightarrow{AB} = (\vec{F_1} + \vec{F_2}).\overrightarrow{AB}$$

Généralement : Le travail fourni par un ensemble de forces constantes $(\vec{F_1},\vec{F_2},\dots\vec{F_n})$, exercées sur un corps en translation, est égal au produit scalaire de la somme vectorielle de ces forces $\sum\vec{F}$ et du vecteur déplacement $\overrightarrow{AB}$: $W_{A\to B}(\vec{F_1},\vec{F_2},\dots,\vec{F_n}) = \sum\vec{F}.\overrightarrow{AB}$

II. Travail du poids d'un corps :

Lors d'un mouvement d'un corps solide (S) situé à une altitude h de la terre, où on peut considérer que le champ de pesanteur est uniforme ($\vec{g} = \overrightarrow{cte}$), et par conséquent le poids du corps (S) est une force constante ($\vec{P} = \overrightarrow{cte}$).



Soit le repère terrestre $\mathcal{R}(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ un repère orthonormé, l'expression du travail du poids lors de déplacement de G_A vers G_B est : $W_{G_A\to G_B}(\vec{P}) = \vec{P}.\overrightarrow{G_AG_B}$

Les composantes de $\vec{P}$ et $\overrightarrow{G_AG_B}$ dans le repère $\mathcal{R}(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ sont :

$\vec{P}\begin{pmatrix}0\\0\\-mg\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{G_AG_B}\begin{pmatrix}x_B - x_A\\y_B - y_A\\z_B - z_A\end{pmatrix}$

On écrit alors :

$$\boldsymbol{W_{G_A\to G_B}(\vec{P}) = -mg(z_B - z_A)}$$

Donc :

$$\boldsymbol{W_{G_A\to G_B}(\vec{P}) = mg(z_A - z_B)}$$

Conclusion : Le travail du poids d'un corps ne dépend pas de la trajectoire suivie par le centre d'inertie, il ne dépend que de la position initiale de cote $\boldsymbol{z_A}$ et la position finale de cote $\boldsymbol{z_B}$.
- Quand le déplacement s'effectue du haut vers le bas, le travail est positif $W(\vec{P}) > 0$, il est dit moteur ;
- Quand le déplacement s'effectue du bas vers le haut, le travail est négatif $W(\vec{P}) < 0$, il est dit résistant ;
- Quand le déplacement s'effectue horizontalement, le travail est nul.

III. Puissance d'une force :

1. La puissance moyenne :

La puissance moyenne d'une force est définie par la relation : $\boldsymbol{P_m(\vec{F}) = \frac{W(\vec{F})}{\Delta t}}$; avec $W(\vec{F})$ le travail de la force $\vec{F}$ effectue pendant la durée Δt.
La puissance est exprimée, dans le système international, par (watt) de symbole (W).

2. La puissance instantanée :

On définit la puissance instantanée d'une force $\vec{F}$ par la relation : $\boldsymbol{P_i(\vec{F}) = \frac{\delta W(\vec{F})}{\delta t}}$, tel que $\delta W(\vec{F})$ est le travail élémentaire effectue pendant la durée très courte δt.
Or l'expression du travail élémentaire $\delta W(\vec{F}) = \vec{F}.\overrightarrow{\delta l}$

Alors : $P_i(\vec{F}) = \frac{\vec{F}.\vec{\delta l}}{\delta t} = \vec{F}.\vec{V}$

Avec $\vec{V}$ est la vitesse instantanée du point d'application de la force $\vec{F}$.

- **<u>Définition :</u>**

Lorsque le point d'application d'une force $\vec{F}$ se déplace à la vitesse $\vec{V}$, la puissance instantanée $P_i(\vec{F})$ de cette force est égale au produit scalaire des vecteurs force $\vec{F}$ et vitesse instantanée $\vec{V}$:

$$\boldsymbol{P_i(\vec{F}) = \vec{F}.\vec{V}}$$

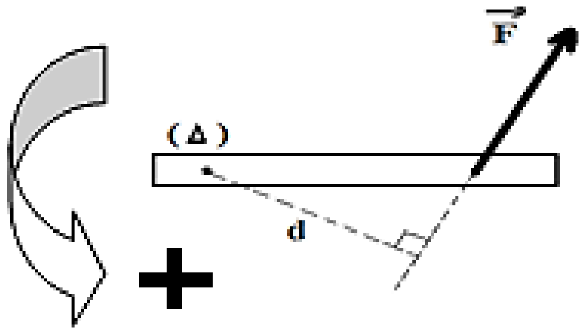
IV. Travail et puissance d'une force de moment constant appliqué à un solide en mouvement de rotation autour d'un axe fixe :

1. Moment d'une force :

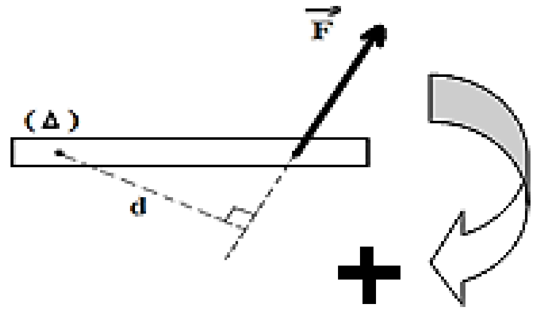
Le moment, par rapport à un axe (Δ), d'une force $\vec{F}$ orthogonale à cet axe est le produit de l'intensité F de cette force par la distance d séparant la droite d'action de la force et l'axe de rotation (Δ) :

$$\boldsymbol{\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = \pm F.d}$$

<u>Remarque</u> : le moment est une grandeur algébrique, son signe dépend du sens positif de rotation choisi.



$\boldsymbol{\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = +F.d}$



$\boldsymbol{\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = -F.d}$

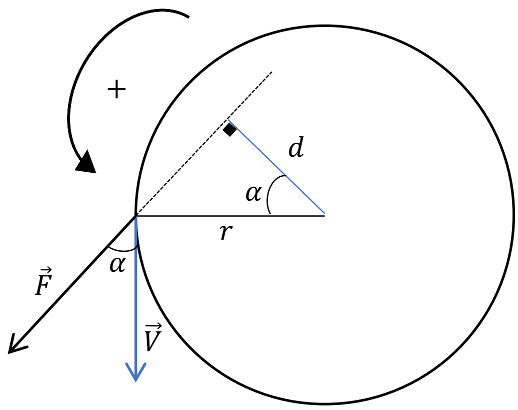
2. Puissance d'une force de moment constant appliqué à un solide en mouvement de rotation autour d'un axe fixe :

On considère un disque en mouvement de rotation. Une force $\vec{F}$ est appliquée à ce disque.

On a : $P(\vec{F}) = \vec{F}.\vec{V} = F.V.cos(\alpha)$

Sachant que : $\cos(\alpha) = \frac{d}{r}$; alors $P(\vec{F}) = F.V.\frac{d}{r} = F.d.\frac{V}{r}$

Donc : $P(\vec{F}) = M_\Delta(\vec{F}).\omega$; car $M_\Delta(\vec{F}) = F.d$ et $\omega = \frac{V}{r}$



3. Travail d'une force de moment constant appliqué à un solide en mouvement de rotation autour d'un axe fixe :

Pour le travail on a : $P(\vec{F}) = \frac{W(\vec{F})}{\Delta t}$

Alors : $W(\vec{F}) = P(\vec{F}).\Delta t = \boldsymbol{M_\Delta(\vec{F}).\omega.\Delta t}$

On sait que : $\Delta\theta = \omega.\Delta t$

Donc : $\boldsymbol{W(\vec{F}) = M_\Delta(\vec{F}).\Delta\theta}$

<u>Conclusion</u> : Le travail effectué par une force appliquée à un solide en mouvement de rotation, avec une vitesse angulaire ω, lorsque ce solide tourne d'un angle $\Delta\theta$ est $\boldsymbol{W(\vec{F}) = M_\Delta(\vec{F}).\Delta\theta}$ ou $\boldsymbol{M_\Delta(\vec{F})}$ est le moment de $\vec{F}$ par rapport à l'axe de rotation Δ .

La puissance instantanée de cette force est : $\boldsymbol{P(\vec{F}) = M_\Delta(\vec{F}).\omega}$.