# Exercice

Déterminer les limites suivantes : $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt[4]{x-1} - \sqrt[3]{3-x}}{\sqrt{x-1} - \sqrt[3]{3-x}}$ ، $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sin\left(\pi\left(x^2 + x - 12\right)\right)}{x-3}$

$\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{5\sqrt[3]{x^2-1} - 2\sqrt{x^3-2}}{\sqrt[3]{x^2-1}\,\sqrt{x^3-2} - 10}$ ، $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt[6]{32} - \sqrt{2-x^2}\,\sqrt[3]{1+\cos x}}{\sqrt[3]{2}\,\sqrt{2-x^2} - \sqrt{2}\,\sqrt[3]{1+\cos x}}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 \arctan\left(\sqrt{1 + \dfrac{2}{x}} - 1 - \dfrac{1}{x}\right)$ ، $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arctan\left(\sqrt{1+x} - 1\right)}{x^2}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x\left(\arctan 2x - \arctan\sqrt{x^2+1}\right)$ ، $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\pi}{2}\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\arctan\left(\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}\right)$

Soit f la fonction définie sur par : $\begin{cases} f(x) = 1 + \sqrt[3]{x^3 - 2x^2} \,;\, x \geq 2 \\ f(x) = \dfrac{2}{\pi}\arctan\dfrac{1}{\sqrt{2-x}} \,;\, x \cancel{\leq} 2 \end{cases}$ $x < 2$

1 1. Montrer que f est continue en 2.

2 2. Etudier la dérivabilité de f en 2 est interpreter les resultats obtenus.

1 3. Etudier la dérivabilité de f en 0 est interpreter le resultat obtenu.

1 4. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

1 5. Etudier les branches infinies au voisinage de $+\infty$

2 6. Montrer que f est strictement croissante sur $]2, +\infty[$ et $]-\infty, 2[$ et dresser le tableau de variation de f .

8. Soit g la restriction de f sur $]-\infty, 2[$ .

1 (1) Montrer que g est bijective de $]-\infty, 2[$ vers un intervalle J à déterminer .

1 (2) Tracer la courbe de $g^{-1}$

2 (3) Déterminer $g^{-1}(x), \forall x \in J$ .

**Questions indépendantes**

1,5 1) Montrer que si f est continue sur [-1,1 ] alors il existe c de ]-1,1[ tel que $f(c)=\frac{2c}{c^2-1}$

1,5 2) Montrer que $\arctan 2+\arctan 5+\arctan 8=\frac{5\pi}{4}$

1 3) Montrer que $\arctan(x)+\arctan(\sqrt{x^2+1}-x)=\frac{\pi}{2}, \forall x\in\mathbb{R}$.

1 4) Resoudre dans , l' equation :

$\operatorname{Arctan}(x-3)+\arctan(x+3)+\arctan(x)=\frac{5\pi}{4}$

1 5)calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[4]{x+3}-\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x+3}-\sqrt{x}}\sqrt[4]{x}$

**Exercice31:**soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n}{\sqrt{u_n+2}} & \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 \in ]-1;0[ \end{cases}$$

1) Montrer que $-1 \prec u_n \prec 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

2) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante

3) Montrer que $u_{n+1} \geq \dfrac{u_n}{\sqrt{u_n+2}} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Et en déduire que : $u_n \geq \dfrac{u_0}{\left(\sqrt{u_0+2}\right)^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

**Solution :** 1) montrons par récurrence que

## Ex 1 :

Soit $f$ la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x - 1 + \sqrt{x^2+1} & \text{si } x < 0 \\ f(x) = \sqrt[3]{x - \operatorname{Arctan} x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

1 1) Étudier la continuité de $f$ en $0$.

1 2) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$ $\operatorname{Arctan} x \leq x$

2 3)a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ :

$$\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \leq x - \operatorname{Arctan} x \leq \frac{x^3}{3}$$

1 b) Calculer la limite : $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x - \operatorname{Arctan} x}{x^3}$

2 c) Etudier la dérivabilité de la fonction $f$ en $0$.

3 4) Étudier les variations de la fonction $f$

1 6) Soit $g$ la restriction de la fonction $f$ sur $I = \mathbb{R}_-^*$,

Montrer que $g$ réalise une bijection de $I$ sur un inter valle $J$ à déterminer puis déterminer l'expression de $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$

Ex 2 :

I) Calculer les limites suivantes :

2 $$\lim_{x\to+\infty} \frac{2\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[5]{x}.\sqrt[15]{x^2}}{\sqrt[3]{x-1}-\sqrt[3]{x}} \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\left(x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

1 II) Montrer que : $2\text{Arctan}(2)+\text{Arctan}\left(\frac{4}{3}\right)=\pi$

2 III) Montrer que pour tout $x\in\left]1;+\infty\right[$ :

$$\text{Arctan}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)=2\text{Arctan}(x)-\pi$$

2 IV) Soit $f$ une fonction numérique continue sur $[a,b]$.

Montrer qu'il existe au moins un réel $c\in\left]a,b\right[$ tel q
ue

$$f(c)=\frac{1}{a-c}+\frac{1}{b-c}$$

**Exercice (4)**

Soit $f$ la fonction définie par : $f(x)=\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^{2}}$

1) montrer que $\left(\forall x\in\left[-1,1\right]-\left\{0\right\}\right)\ f(x)=\frac{1}{x}\left(\frac{1}{1+\sqrt{x+1}}-\frac{1}{1+\sqrt{1-x}}\right)$

2) déduire que $f$ admet un prolongement par en $a=0$ et le définir

## Exercice 4

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f(x) = \arctan\left(\left(\sqrt{x} - 1\right)^3\right)$$

1) calculer les limites $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x)}{x-1}$

2) montrer que $f$ est une bijection de $\mathbb{R}^+$ vers un intervalle $J$ que l'on déterminera

3) calculer $f^{-1}(x)$ pour tout $x$ de $J$ $\square$

## Exercice (2)

Soit $f$ la fonction telle que : $f(x)=\dfrac{1+\cos\left(\pi\sqrt{x+1}\right)}{x^2}$

Montrer que $f$ admet un prolongement $h$ par continuité en $a=0$

( poser $t=\sqrt{x+1}-1$ ) puis définir $h$

## Exercice (3)

Soit $a$ un réel .

On considère la fonction $f$ définie par : $\begin{cases} f(x)=x^2-a+1 & ; \quad x\le a \\ f(x)=\dfrac{3x-1}{x+1} & ; \quad x>a \end{cases}$

1) déterminer suivant $a$ l'ensemble de définition $D_f$

2) déterminer $a$ pour que $f$ soit continue sur $\mathbb{R}$

( on donne $(t-1)^2(t+2)=t^3-3t+2$ )

**Exercice (4)** Soit $f$ la fonction définie sur $D = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ par : $f(x) = \tan^2 x - \tan x$

1) calculer les limites de $f$ au bornes de $D$

2) étudier les variation de $f$ et dresser sa table de variation

3) Soit $g$ la restriction de $f$ sur l'intervalle $I = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$

a) montrer que $g$ est une bijection de $I$ vers $J = [0, +\infty[$

b) montrer que $(\forall x \in [0, +\infty[)\ \ g^{-1}(x) = \arctan\left(\sqrt{x + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2}\right)$

## Exercice 2

1) montrer que $\left(\forall (a,b)\in \left]0,1\right[^2\right)\quad \arctan a + \arctan b = \arctan\frac{a+b}{1-ab}$

2) déduire que $3\arctan\frac{1}{3} = \arctan\frac{13}{9}$

## Exercice 3

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - \sin x$

1) calculer les limites $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

2) étudier le sens de variation de $f$ et déduire que $f$ est bijective de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$

3) a) soit $n$ un élément de $\mathbb{N}^*$ . montrer que $(\exists!\alpha_n \in \mathbb{R})\quad \sin\alpha_n = \alpha_n - \frac{1}{n}$

b) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\quad 0 < \alpha_{n+1} < \alpha_n$

## Exercice 6

1) a) montrer que $\left(\exists!\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[\right) \quad \tan\alpha = \frac{1}{\alpha}$

b) montrer que $\alpha = \pi + \arctan\frac{1}{\alpha}$

2) a) montrer que :

$$\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right)\left(\exists!\beta_n \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[\right) \quad \tan\beta_n = n + \frac{1}{\beta_n}$$

b) montrer que $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right) \quad \alpha < \beta_n$

c) étudier la monotonie de $\left(\beta_n\right)_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \beta_n$

## Exercice 3

Soit $n$ un entier naturel non nul .

On considère la fonction $F_n$ définie sur $\mathbb{R}^+$ par $F_n(x) = 2x^3 - x^2 + 2(n+1)x - 1$

1) Montrer que $(\exists! a_n \in ]0,1[) \quad F_n(a_n) = 0$
2) Etudier le signe de $F_{n+1}(x) - F_n(x)$
3) étudier la monotonie de $(a_n)_n$
4) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad a_n \leq \dfrac{1}{n+1}$

## Exercice 4

Soient $n$ un entier de $\mathbb{N}^*$ et $f_n$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f_n(x) = \arctan\left(\frac{x}{n}\right) + 2x - 1$$

1) étudier le sens de variation de la fonction $f_n$
2) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution $b_n$ et $b_n < \dfrac{1}{2}$
3) Etudier le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ puis déduire la monotonie de $(b_n)_n$