Exercice1 : **(3 points)**

On considère les ensembles E , F et H tels que :

$$E=\left\{n\in IN/\frac{n^2-2n+5}{n-1}\in IN\right\} \quad , \quad F=\left\{n\in Z/\left|\frac{1-x}{2}\right|\leq 1\right\} \quad \text{et} \quad H=F-E \ .$$

1,5 1. Écrire en extension E , F et H .

1,5 2. Écrire en extension $E\Delta F$, $P(E)$ et $H\times E$.

Exercice2 : **(4 points)**

On considère l'ensemble $E=\left\{\frac{a^2-1}{a^2+1}/a\in IR\right\}$.

1 1. a- Montrer que $\frac{4}{5}\in E$ et $\frac{-5}{4}\notin E$.

0,75 b- Prouver que $E\subset[-1;1[$.

1+0,25 2. a- Montrer que $[-1;1[\subset E$. Que peut-on déduire ?

1 b- Déterminer C_{IR}^{E} et $E-\overline{Z}$.

Exercice3 : **(1,5 points)**

Résoudre dans l'ensemble IR ce qui suit :

0,5 + 1 $E(\frac{x}{2})=1009$; $-2\leq E(\frac{x-1}{3})<1$

Exercice4 : **(1,5 points)**

A et B deux parties non vides d'un ensemble E .

0,5 1. Montrer que : $B\cup(A-B) = A\cup B$

1 2. Déduire que : $B\cup(A-B)=A \iff \overline{A}\subset\overline{B}$

Exercice 6: (3.5 Points)

On considère l'ensemble E définie par : $E=\left\{ \frac{x}{\sqrt{x-1}} \ / \ x\in]1;+\infty[\right\}$

1. Montrer que : $3\in E$ et que $1\notin E$

2. Montrer que : $E\subset [2;+\infty[$.

3. a. Prouver que $(\forall y\in [2;+\infty[)\ (\exists x\in]1;+\infty[) : \quad y=\frac{x}{\sqrt{x-1}}$

b. Déduire que $E=[2;+\infty[$

$E = \left\{ \frac{x}{\sqrt{x-1}} \ / \ x \in]1,+\infty[\right\}$

1) Mq $3 \in E$

$\frac{x}{\sqrt{x-1}} = 3 \iff x = 3\sqrt{x-1}$

$\iff x^2 = 9(x-1)$

$\iff x^2 - 9x + 9 = 0$

$\Delta = 81 - 36$

$= 45 > 0$

$x_1 = \frac{9+3\sqrt{5}}{2}$, $x_2 = \frac{9-3\sqrt{5}}{2}$

$x_1 > 1$ et $x_2 < 1$

d'où $3 \in E$

$1 \notin E$

$\frac{x}{\sqrt{x-1}} = 1$

$\iff x = \sqrt{x-1}$

$\iff x^2 = x - 1$

$\iff x^2 - x + 1 = 0$

$\Delta = 1 - 4 = -3$

pas solution

donc $1 \notin E$

Exercice 6: (3.5 Points)

On considère l'ensemble E définie par : $E = \left\{ \frac{x}{\sqrt{x-1}} \ / \ x \in]1;+\infty[\right\}$

1. Montrer que : $3 \in E$ et que $1 \notin E$

2. Montrer que : $E \subset [2;+\infty[$.

3. a. Prouver que $(\forall y \in [2;+\infty[)\ (\exists x \in]1;+\infty[)$: $y = \frac{x}{\sqrt{x-1}}$

b. Déduire que $E = [2;+\infty[$

② $E \subset]2,+\infty[$ $\qquad y \in E \Leftrightarrow (\exists x > 1)\ y = \frac{x}{}$

Soit $y \in E$ et Mq $y \in]2,+\infty[$

on a $y \in E \Leftrightarrow (\exists x > 1) : y = \frac{x}{\sqrt{x-1}}$

Mq $y > 2$ c.à.d

$$\frac{x}{\sqrt{x-1}} > 2$$

$$\Leftrightarrow x > 2\sqrt{x-1}$$

$$\Leftrightarrow x^2 > 4(x-1)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4\cancel{x} + 4 > 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 > 0 \text{ vrai touj}$$

D'ou $y > 2$ c.à.d $y \in]2,+\infty[$

D'ou $E \subset]2,+\infty[$

Exercice 2 (10 Points)

1. Montrer que : $x \neq 4 \Rightarrow \dfrac{x+6}{x-2} \neq 5$ pour tout réel $x \neq 2$	1pts
2. Montrer que : $\dfrac{a}{1+a} = \dfrac{b}{1+b} \Leftrightarrow a = b$ pour tout réels a et b distincts de -1	1.5pts
3. Montrer que : $(\forall x \geq 0)$: $\sqrt{x+8} + \sqrt{x+3} = 5 \Leftrightarrow x = 1$.	1.5pts
4. Montrer que : $(\forall a \in \mathbb{R}^+)(\forall b \in \mathbb{R}^+)$: $a \neq b \Rightarrow \dfrac{a^2+5}{a^2+2} \neq \dfrac{b^2+5}{b^2+2}$.	1.5pts
5. Montrer que : $(\forall y \in]1,+\infty[)(\exists x \in]2,+\infty[)$: $\left(\sqrt{\dfrac{x}{x-2}} = y \right)$.	1pts
6. Montrer que : 7 divise $3^{2n} - 2^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$.	1pts
7. Etablir que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et $\forall q \in \mathbb{R} - \{1\}$	1.5pts
8. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\exists (a_n, b_n) \in \mathbb{N}^2)$: $\left(1+\sqrt{2}\right)^n = a_n + \sqrt{2}\, b_n$	1pts

Exercice 5 (1.5 Points)

Soient x et y deux réels de l'intervalle $]-1,1[$.

Montrer que : $-1<\dfrac{x+y}{1+xy}<1$

1.5pts

2017-2018	DEVOIR N°1	1ÈRE BAC SM

EXERCICE (1)

On considère les propositions suivantes

P_1 " $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) : \quad x + 2y > 3$ "

P_2 " $(\exists z \in \mathbb{R}) \quad z - 1 < \frac{z}{z-1} \leq z$ "

P_3 " $(\forall a \in \mathbb{R})(\forall b \in \mathbb{R}) : \left[(a \neq 1 \text{ et } b \neq 1) \Rightarrow (a + b \neq 2) \right]$ "

1) donner la négation des propositions P_1 , P_2 et P_3 — 4 pts
2) donner la contraposée de l'implication définie dans la proposition P_3 — 1 pt
3) quelle est la valeur de vérité de la proposition P_3 ? — 1.5 pt

EXERCICE (2)

On pose $I =]-\infty, -2[$

1) montrer que $(\forall a \in I)(\forall b \in I) \quad ab + a + b > 0$ — 1.5 pt
2) en utilisant le raisonnement par contraposée montrer que :

$(\forall a \in I)(\forall b \in I) / \left[(a \neq b) \Rightarrow \left(\frac{a+1}{a^2+2a+2} \neq \frac{b+1}{b^2+2b+2} \right) \right]$ — 2 pts

Rép : $\overline{P_1}$: « $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) : x + 2y \leq 3$

⚠ $P_2 : (\exists z \in \mathbb{R}) , z - 1 < \frac{z}{z-1}$ et $\frac{z}{z-1} \leq z$

D'où $(\overline{P_2}) : (\forall z \in \mathbb{R}) , z - 1 \geq \frac{z}{z-1}$ ou $\frac{z}{z-1} > z$

$\overline{P_3} (\exists a \in \mathbb{R})(\exists b \in \mathbb{R}) : [a \neq 1 \text{ et } b \neq 1 \text{ et } a + b = 2]$

② la contraposée est

$(\forall a \in \mathbb{R})(\forall b \in \mathbb{R}) : a + b = 2 \Rightarrow a = 1$ ou $b = 1$

3) Fausse :

pour $a = 2$ et $b = 0$

on a $a + b = 2$ mais

$a \neq 1$ et $b \neq 1$

Rappel

$\overline{(P \Rightarrow Q)}$

$\Leftrightarrow P$ et $\overline{Q}$

$P \Rightarrow Q$

sa contraposé

est $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$

EXERCICE (3)

En raisonnant par récurrence montrer que :

1) $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\quad \sum_{k=1}^{k=n} k \times 2^{k-1} = 1 + 2^n(n-1)$ — 2 pts

2) $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\quad \sum_{p=1}^{p=n} \frac{1}{4p^2-1} = \frac{n}{2n+1}$ — 2 pts

EXERCICE (4)

Utilisez le raisonnement par disjonction de cas et montrer que :

$(3 \text{ ne divise pas } n) \Rightarrow (3 \text{ divise } n^2 - 1)$ — 2 pts

EXERCICE (5)

Soient a et b deux nombres rationnels tels que $a \neq b$.

On pose $x = \frac{a+b\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$ (on rappelle que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$)

1) Montrer par l'absurde que $x \neq b$ — 1.5 pt

2) Montrer que $x \notin \mathbb{Q}$ (utilisez un raisonnement par l'absurde) — 1.5 pt

Rép : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $\sum_{K=1}^{K=n} K.2^{K-1} = 1 + 2^n(n-1)$

l'initiation

pour $n = 1$ on a $\sum_{K=1}^{K=1} K2^{K-1} = 1 + 2^1(1-1)$

$1.2^0 = 1$

$1 = 1$ vrai

l'hérédité

soit $n \in \mathbb{N}^*$

on suppose que

$\cdot \sum_{K=1}^{K=n} K2^{K-1} = 1 + 2^n(n-1)$

et Montrons que :

$\sum_{K=1}^{K=n+1} K2^{K-1} = 1 + 2^{n+1} \cdot n$?

somme $\sum$ sigma

produit $\prod$ Pigma

Rappel

sur $\sum$

$\cdot\ a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{K=1}^{K=n} a_K$

$\cdot\ 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots 2n = \sum_{K=1}^{K=2n} K$

$\cdot\ 2 + 4 + 6 + 8 + \cdots 2n$

$\sum_{K=1}^{K=n} 2K$

$\cdot\ 1 + 3 + 5 + \cdots 2n+1$

$\sum_{K=0}^{n} (2K+1)$

EXERCICE (3)

En raisonnant par récurrence montrer que :

1) $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\quad \sum_{k=1}^{k=n} k \times 2^{k-1} = 1 + 2^n(n-1)$ 2 pts

2) $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\quad \sum_{p=1}^{p=n} \frac{1}{4p^2-1} = \frac{n}{2n+1}$ 2 pts

EXERCICE (4)

Utilisez le raisonnement par disjonction de cas et montrer que :

$(3 \text{ ne divise pas } n) \Rightarrow (3 \text{ divise } n^2 - 1)$ 2 pts

EXERCICE (5)

Soient a et b deux nombres rationnels tels que $a \neq b$.

On pose $x = \frac{a + b\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$ (on rappelle que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$)

1) Montrer par l'absurde que $x \neq b$ 1.5 pt
2) Montrer que $x \notin \mathbb{Q}$ (utilisez un raisonnement par l'absurde) 1.5 pt

Ona $\sum_{K=1}^{n+1} K 2^{K-1} = \underbrace{1.2^0 + 2.2^1 + 3.2^2 + \dots\dots n.2^{n-1}} + (n+1)2^n$

$= \sum_{K=1}^{K=n} K.2^{K-1} + (n+1)2^n$

$= 1 + 2^n(n-1) + (n+1).2^n$

$= 1 + 2^n(n-1+n+1)$

$= 1 + 2^n.2n$

$= 1 + 2^{n+1}.n$

les ensembles

Ecriture en extention
" " en compréhention

$E = \{ n \in \mathbb{Z} \ / -2 \leqslant n \leqslant 3 \}$ (compréhention

E extention

$= \{ -2, -1, 0, 1, 2, 3 \}$.

$F = \{ x \in \mathbb{R} \ / \ |x-1| \leqslant 3 \}$ (en compréhention

$= \{ x \in \mathbb{R} \ / -3 \leqslant x-1 \leqslant 3 \}$

$= \{ x \in \mathbb{R} \ / -2 \leqslant x \leqslant 4 \}$

$= [-2, 4] \longleftarrow$ en extetion

· pour Mq $A \subset B$

on prend un element $x \in A$ et on montre que B

· $A \subset B \Longleftrightarrow \forall x / \ x \in A \Rightarrow x \in B$

· $A = B \Longleftrightarrow A \subset B$ et $B \subset A$.

EXERCICE (3)

En raisonnant par récurrence montrer que :

1) $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\quad \sum_{k=1}^{k=n} k \times 2^{k-1} = 1 + 2^n (n-1)$ — 2 pts

2) $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\quad \sum_{p=1}^{p=n} \frac{1}{4p^2-1} = \frac{n}{2n+1}$ — 2 pts

EXERCICE (4)

Utilisez le raisonnement par disjonction de cas et montrer que :

$\left(3 \text{ ne divise pas } n\right) \Rightarrow \left(3 \text{ divise } n^2 - 1\right)$ — 2 pts

EXERCICE (5)

Soients a et b deux nombres rationnels tels que $a \neq b$.

On pose $x = \frac{a + b\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$ (on rappelle que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$)

1) Montrer par l'absurde que $x \neq b$ — 1.5 pt

2) Montrer que $x \notin \mathbb{Q}$ (utilisez un raisonnement par l'absurde) — 1.5 pt

2/ l'initiation : pour $n = 1$

$$\sum_{p=1}^{p=1} \frac{1}{4p^2-1} = \frac{1}{2.1+1}$$

$$\frac{1}{4-1} = \frac{1}{3}$$

$1/3 = 1/3$ vraie

l'heridité

soit $n \in \mathbb{N}^*$

on suppose que :

$$\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{4p^2-1} = \frac{n}{2n+1}$$

et Mq $\sum_{p=1}^{n+1} \frac{1}{4p^2-1} = \frac{n+1}{2(n+1)+1} = \frac{n+1}{2n+3}$

On a $\sum_{p=1}^{n+1} \frac{1}{4p^2-1} = \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \cdots\cdots \frac{1}{4n^2-1}} + \frac{1}{4(n+1)^2-1}$

$$= \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{4p^2-1} + \frac{1}{4(n+1)^2-1}$$

$$= \frac{n}{2n+1} + \frac{1}{4(n+1)^2-1}$$

$$= \frac{n(4(n+1)^2-1) + (2n+1)}{(2n+1)(2(n+1)-1)(2(n+1)+1)}$$

$$= \frac{n\left(4(n+1)^2-1\right)+(2n+1)}{(2n+1)\left(2(n+1)-1\right)\left(2(n+1)+1\right)}$$

$$= \frac{n(2n+1)(2n+3)+(2n+1)}{(2n+1)(2n+1)(2n+3)}$$

$$= \frac{(2n+1)\left(n(2n+3)+1\right)}{(2n+1)^2(2n+3)}$$

$$= \frac{(2n+1)(2n^2+3n+1)}{(2n+1)^2(2n+3)}$$

$$= \frac{(2n+1)(2n^2+2n+n+1)}{(2n+1)^2(2n+3)}$$

$$= \frac{\cancel{(2n+1)}\,\cancel{(2n+1)}(n+1)}{\cancel{(2n+1)^2}(2n+3)} = \frac{n+1}{2n+3}$$

$2\left(\frac{n+1}{2}\right)(n+a)$

$a(x-\alpha)^2+b$

$4(n+1)^2-1$

$(2(n+1))^2-1$

$(2(n+1)-1)(2(n+1)+1)$

d'ou d'apres le principe de recurrenc

$y = ax+b$

$(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ \sum \frac{1}{4p^2-1} = \frac{n}{2n+1}$

$\underbrace{2n^2+2n}+\underbrace{n+1}$

$n(2n+1)+(2n+1)$

$=(2n+1)(n+1)$

$2x^2+3x+1$

$= 2\left(x+\frac{1}{2}\right)(x+1)$

$= (2x+1)(x+1)$

ax^2+bx+c

$= a(x-x_1)(x-x_2)$

$2x^2+3x+1$

$\Delta = 9-8 = 1$

$x_2 = \frac{-3-1}{4} = -1 \quad x_1 = \frac{-3+1}{4} = -\frac{1}{2}$

Exercice 3

1) montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}^*)(\forall y \in \mathbb{R}^*) : (x \neq y \text{ et } xy \neq 1) \Rightarrow \left(x + \frac{1}{x} \neq y + \frac{1}{y}\right)$ — 2 pts

2) en utilisant le raisonnement par disjonction de cas montrer que : — 2 pts

$(\forall x \in \mathbb{R})\quad |x-2| \leq x^2 + x + 3$

3) montrer par l'absurde que $\sqrt{2} + \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ (on donne $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$) — 2 pts

4) montrer par récurrence que :

a) $(\forall n \in \mathbb{N})\quad 1 + 3 + \ldots\ldots + (2n+1) = (n+1)^2$ — 2 pts

b) $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\quad \sum_{k=1}^{k=2n} (-1)^k k^2 = n(2n+1)$ — 2 pts

Exercice 4

Soient a et b deux réels. On considère la proposition :

$$Q \text{ " } \left[(\forall \alpha \in \mathbb{R}^{*+})\ a < b + \alpha\right] \Rightarrow (a \leq b)$$

1) donner la négation de Q — 1 pt

2) donner la contraposée de Q — 1 pt

3) montrer que Q est vraie — 1 pt

---

2)

$(\forall x \in \mathbb{R})\ |x-2| \leq x^2 + x + 3$

$(\forall x \in \mathbb{R})\ x^2 + x + 3 > 0$ (on vérifie)

car $\Delta = 1 - 12 = -11 < 0$

Alors : le signe est le signe de a D'où

$(\forall x \in \mathbb{R}),\ x^2 + x + 3 > 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
	$+$	

• Si $x - 2 \geq 0$ alors $|x-2| = x - 2$

$x^2 + x + 3 - (x-2) = x^2 + x + 3 - x + 2$
$= x^2 + 5 \geq 0$

d'où $x^2 + x + 3 \geq (x-2)$

• Si $x - 2 < 0$ alors $|x-2| = -x + 2$

$x^2 + x + 3 + x - 2 = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 \geq 0$

$x^2 + x + 3 > -x + 2$

D'où : $\forall x \in \mathbb{R}$

$x^2 + x + 3 \geq |x-2|$

Exercice 3

1) montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}^*)(\forall y \in \mathbb{R}^*) : (x \neq y \text{ et } xy \neq 1) \Rightarrow \left(x + \frac{1}{x} \neq y + \frac{1}{y} \right)$ — 2 pts

2) en utilisant le raisonnement par disjonction de cas montrer que : — 2 pts

$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad |x-2| \leq x^2 + x + 3$

3) montrer par l'absurde que $\sqrt{2} + \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ (on donne $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$) — 2 pts

4) montrer par récurrence que :

a) $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 1 + 3 + ... + (2n+1) = (n+1)^2$ — 2 pts

b) $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \sum_{k=1}^{k=2n} (-1)^k k^2 = n(2n+1)$ — 2 pts

Exercice 4

Soient a et b deux réels . On considère la proposition :

$$Q \text{ " } \left[(\forall \alpha \in \mathbb{R}^{*+}) \; a < b + \alpha \right] \Rightarrow (a \leq b)$$

1) donner la négation de Q — 1 pt

2) donner la contraposée de Q — 1 pt

3) montrer que Q est vraie — 1 pt

---

3) $\sqrt{2} + \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$

on suppose que $\sqrt{2} + \sqrt{3} \in \mathbb{Q}$

et aussi $\sqrt{2} - \sqrt{3} \in \mathbb{Q}$

$a + b \in \mathbb{Q}$
$a - b \in \mathbb{Q}$

d'ou : $(\sqrt{2} + \sqrt{3}) + (\sqrt{2} - \sqrt{3}) \in \mathbb{Q}$

$\Rightarrow \quad 2\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$

$2\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{N}^*$ ~~et~~ $b \in \mathbb{N}^*$

$\sqrt{2} = \frac{a}{2b} \in \mathbb{Q}$ contradict

car $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$