Exercice1 : (3 points)

On considère les ensembles E , F et H tels que :

$$E=\left\{n\in IN/\frac{n^2-2n+5}{n-1}\in IN\right\} \quad , \quad F=\left\{n\in Z/\left|\frac{1-x}{2}\right|\leq 1\right\} \quad \text{et} \quad H=F-E \ .$$

1,5 1. Écrire en extension E , F et H .

1,5 2. Écrire en extension $E\Delta F$, $P(E)$ et $H\times E$.

Exercice2 : (4 points)

On considère l'ensemble $E=\left\{\frac{a^2-1}{a^2+1}/a\in IR\right\}$.

1 1. a- Montrer que $\frac{4}{5}\in E$ et $\frac{-5}{4}\notin E$.

0,75 b- Prouver que $E\subset[-1;1[$.

1+0,25 2. a- Montrer que $[-1;1[\subset E$. Que peut-on déduire ?

1 b- Déterminer C_{IR}^{E} et $E-\overline{Z}$.

Exercice3 : (1,5 points)

Résoudre dans l'ensemble IR ce qui suit :

0,5 + 1 $E(\frac{x}{2})=1009$; $-2\leq E(\frac{x-1}{3})<1$

Exercice4 : (1,5 points)

A et B deux parties non vides d'un ensemble E .

0,5 1. Montrer que : $B\cup(A-B)=A\cup B$

1 2. Déduire que : $B\cup(A-B)=A \Leftrightarrow \overline{A}\subset\overline{B}$

Exercice 6: (3.5 Points)

On considère l'ensemble E définie par : $E=\left\{ \dfrac{x}{\sqrt{x-1}} \;/\; x\in \left]1;+\infty\right[\right\}$

1. Montrer que : $3\in E$ et que $1\notin E$

2. Montrer que : $E\subset \left[2;+\infty\right[$.

3. **a**. Prouver que $\left(\forall y\in\left[2;+\infty\right[\right)\left(\exists x\in\left]1;+\infty\right[\right)$: $y=\dfrac{x}{\sqrt{x-1}}$

b. Déduire que $E=\left[2;+\infty\right[$

Exercice 2 (10 Points)

1. Montrer que : $x \neq 4 \Rightarrow \frac{x+6}{x-2} \neq 5$ pour tout réel $x \neq 2$	1pts
2. Montrer que : $\frac{a}{1+a} = \frac{b}{1+b} \Leftrightarrow a = b$ pour tout réels a et b distincts de -1	1.5pts
3. Montrer que : $(\forall x \geq 0)$: $\sqrt{x+8} + \sqrt{x+3} = 5 \Leftrightarrow x = 1$.	1.5pts
4. Montrer que : $(\forall a \in \mathbb{R}^+)(\forall b \in \mathbb{R}^+)$: $a \neq b \Rightarrow \frac{a^2+5}{a^2+2} \neq \frac{b^2+5}{b^2+2}$.	1.5pts
5. Montrer que : $(\forall y \in]1,+\infty[)(\exists x \in]2,+\infty[)$: $\left(\sqrt{\frac{x}{x-2}} = y \right)$.	1pts
6. Montrer que : 7 divise $3^{2n} - 2^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$.	1pts
7. Etablir que : $\sum_{k=1}^{k=n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et $\forall q \in \mathbb{R} - \{1\}$	1.5pts
8. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\exists (a_n, b_n) \in \mathbb{N}^2)$: $(1+\sqrt{2})^n = a_n + \sqrt{2} b_n$	1pts

Exercice 5 (1.5 Points)

Soient x et y deux réels de l'intervalle $]-1,1[$.

Montrer que : $-1<\dfrac{x+y}{1+xy}<1$ 1.5pts

2017-2018	DEVOIR N°1	1ère BAC SM

EXERCICE (1)

On considère les propositions suivantes

P_1 " $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) : \quad x + 2y > 3$ "

P_2 " $(\exists z \in \mathbb{R}) \quad z - 1 < \dfrac{z}{z-1} \leq z$ "

P_3 " $(\forall a \in \mathbb{R})(\forall b \in \mathbb{R}) : \left[(a \neq 1 \ et \ b \neq 1) \Rightarrow (a + b \neq 2) \right]$

1) donner la négation des propositions P_1 , P_2 et P_3 — 4 pts

2) donner la contraposée de l'implication définie dans la proposition P_3 — 1 pt

3) quelle est la valeur de vérité de la proposition P_3 ? — 1.5 pt

EXERCICE (2)

On pose $I =]-\infty, -2[$

1) montrer que $(\forall a \in I)(\forall b \in I) \ ab + a + b > 0$ — 1.5 pt

2) en utilisant le raisonnement par contraposée montrer que :

$(\forall a \in I)(\forall b \in I) \ / \left[(a \neq b) \Rightarrow \left(\dfrac{a+1}{a^2 + 2a + 2} \neq \dfrac{b+1}{b^2 + 2b + 2} \right) \right]$ — 2 pts

EXERCICE (3)

En raisonnant par récurrence montrer que :

1) $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right) \quad \sum_{k=1}^{k=n} k \times 2^{k-1} = 1 + 2^n\left(n-1\right)$ 2 pts

2) $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right) \quad \sum_{p=1}^{p=n} \frac{1}{4p^2 - 1} = \frac{n}{2n+1}$ 2 pts

EXERCICE (4)

Utilisez le raisonnement par disjonction de cas et montrer que :

$\left(3 \ ne\, divise\, pas \ n\right) \Rightarrow \left(3\, divise \ n^2 - 1\right)$ 2 pts

EXERCICE (5)

Soients $a \ et \ b$ deux nombres rationnels tels que $a \neq b$.

On pose $x = \dfrac{a + b\sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1}$ (on rappelle que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$)

1) Montrer par l'absurde que $x \neq b$ 1.5 pt

2) Montrer que $x \notin \mathbb{Q}$ (utilisez un raisonnement par l'absurde) 1.5 pt

Exercice 3

1) montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}^*)(\forall y \in \mathbb{R}^*)$: $(x \neq y \ et \ xy \neq 1) \Rightarrow \left(x + \frac{1}{x} \neq y + \frac{1}{y}\right)$ — 2 pts

2) en utilisant le raisonnement par disjonction de cas montrer que : — 2 pts

$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad |x-2| \leq x^2 + x + 3$

3) montrer par l'absurde que $\sqrt{2} + \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ (on donne $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$) — 2 pts

4) montrer par récurrence que :

a) $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 1 + 3 + \ldots\ldots + (2n+1) = (n+1)^2$ — 2 pts

b) $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \sum_{k=1}^{k=2n} (-1)^k k^2 = n(2n+1)$ — 2 pts

Exercice 4

Soient a et b deux réels . On considère la proposition :

$$Q \text{ " } \left[(\forall \alpha \in \mathbb{R}^{*+}) \ a < b + \alpha\right] \Rightarrow (a \leq b)$$

1) donner la négation de Q — 1 pt

2) donner la contraposée de Q — 1 pt

3) montrer que Q est vraie — 1 pt